BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CARLO CILIBERTO

Su alcuni problemi relativi ad una equazione di tipo iperbolico in due variabili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.3, p. 383–393.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_383_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Su alcuni problemi relativi ad una equazione di tipo iperbolico in due variabili.

Nota di CARLO CILIBERTO (a Napoli)

Sunto. - *È contenuto nelle righe precedenti il n. 1 del testo.*

In una recente Nota ([1]), alla quale rimanderò il lettore con il riferimento (N), ho dato un metodo in base al quale ho stabilito un teorema di esistenza (ma non di unicità) *in grande* per il pro-

([4]) G. BOL, *Ueber ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene*, « Abhandlungen Mathem. Sem. Hamb. Univ. » 11, (1936), pp. 387-393.

([5]) E. BOMPIANI ed E. BORTOLOTTI, *Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese*, « Math. Zeitschrift », 42, (1937), pp. 411-429.

blema di DARBOUX relativo all'equazione:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, z_x, z_y).$$

Scopo del presente lavoro è quello di mostrare come tale metodo può essere utilmente applicato per stabilire teoremi di esistenza *in grande* per altri tipi di problemi relativi all'equazione (I).

Indicati con C_1 e C_2 due archi di curva il primo diagramma rispetto all'asse x e il secondo diagramma rispetto all'asse y, aventi come unico punto comune l'origine degli assi e interamente contenuti nel rettangolo R formato dalle parallele all'asse y condotte per gli estremi di C_1 e dalle parallele all'asse x condotte per gli estremi di C_2, i problemi che prendo a considerare sono i seguenti:

A) Determinare una soluzione $z(x, y)$ dell'equazione (I) assegnati che siano i suoi valori su C_2 e i valori di z_x su [2] C_1.

B) Determinare [3] una soluzione $z(x, y)$ dell'equazione (I) assegnati che siano il suo valore z_0 in un fissato punto (x_0, y_0) di R, e i valori di z_x su C_1 e di z_y su C_2.

Le ipotesi su f e sui dati iniziali, in base ai quali verranno stabiliti i teoremi di esistenza relativi ai problemi enunciati in A) e B), saranno precisate nel seguito.

A conclusione del presente lavoro osserverò, poi, che i problemi enunciati in A) e B) si riducono entrambi ad un problema di CAUCHY nel caso in cui C_1 e C_2 coincidono.

1. Sia $F(\lambda, t, v, w_1, \ldots, w_k)$ una funzione delle $k+2$ variabili $t, v, w_1, \ldots, w_k$ e del parametro λ, definita nello strato

$$S: \quad a \leq \lambda \leq b, \quad c \leq t \leq d, \quad |v|, \ |w_i| < +\infty, \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

(2) È evidente che un problema perfettamente simile a quello enunciato in A) sarebbe quello di determinare una soluzione z della (I) assegnati che siano i suoi valori su C_1 e i valori di z_y su C_2.

(3) Il Prof. C. Miranda mi ha comunicato che del problema enunciato in B) si è già occupata in precedenza la Sig.na Z. Szmydt. Del risultato stabilito dalla Sig.na Szmydt non ho potuto prendere visione dato che non ancora è stato pubblicato.

ivi continua e soddisfacente alla limitazione:

(1) $$|F(\lambda, t, v, w_1, \dots, w_k)| \leq K,$$

con K costante.

Siano $\varphi_1(\lambda, t), \varphi_2(\lambda, t), \dots, \varphi_k(\lambda, t)$ funzioni definite e continue nel rettangolo $R \equiv [a \leq \lambda \leq b, \ c \leq t \leq d]$. Siano, poi, $\sigma(\lambda)$ e $\tau(\lambda)$ due funzioni definite e continue nell'intervallo (a, b) e si abbia:

(2) $$c \leq \sigma(\lambda) \leq d.$$

Consideriamo il problema:

(3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = F(\lambda, t, v, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k), \\ v[\lambda, \sigma(\lambda)] = \tau(\lambda), \end{cases}$$

vogliamo stabilire dei teoremi di equicontinuità delle soluzioni $v(\lambda, t)$ in R rispetto al punto (λ, t), al variare di $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ e τ in opportune famiglie di funzioni.

Vale anzitutto il seguente teorema:

I. - *Sia* $F(\lambda, t, v, w_1, w_2, \dots, w_k)$ *una funzione definita e continua nello strato* S *e verificante la* (1). *Siano* $\varphi_1(\lambda, t), \varphi_2(\lambda, t), \dots, \varphi_k(\lambda, t)$ *funzioni definite in* R, *appartenenti ad un insieme* Φ *di funzioni equilimitate ed equicontinue in* R; $\tau(\lambda)$ *sia una funzione continua nell'intervallo* (a, b) *ed appartenga ad un insieme* T *di funzioni equilimitate ed equicontinue in* (a, b); $\sigma(\lambda)$ *sia una funzione continua in* (a, b) *e verificante la* (2).

Allora le soluzioni $v(\lambda, t)$ *del problema* (3), *ottenute ciascuna in corrispondenza di una fissata k-upla* $[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k]$ *di funzioni appartenenti a* Φ *e di una fissata funzione* $\tau(\lambda)$ *appartenente a* T, *risultano equicontinue in* R, *se per il problema stesso sussiste il teorema di unicità.*

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella svolta per stabilire [4] il teorema I di (N) e, quindi, ci esimiamo dal riprodurla.

Vogliamo ora far vedere che se le funzioni della k-upla $[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k]$ si suppongono appartenenti ad un insieme di fun-

[4] Cfr. loco cit. in [1], pagg. 20-21.

zioni equilimitate in R, ivi equicontinue rispetto a λ, uniformemente rispetto a t, e soltanto continue rispetto a t. possiamo stabilire ancora un teorema che assicuri l'equicontinuità delle $v(\lambda, t)$ in R, purchè la F verifichi una condizione di OSGOOD–TONELLI, relativamente alla variabile v. Precisamente faremo la seguente ipotesi:

a') $F(\lambda, t, v, w_1, w_2, \dots, w_k)$ sia una funzione definita e continua nello strato S e verificante la (1), inoltre per ogni fissato numero positivo N esistano due funzioni $\omega(u)$ e $\psi(\lambda, t)$, per le quali risulti:

$$\begin{matrix} F(\lambda, t, v_2, w_1, \dots, w_k) + \\ - F(\lambda, t, v_1, w_1, \dots, w_k) \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \leq \psi(\lambda, t)\omega(v_2 - v_1), & per \ t > \sigma(\lambda), \\ \geq -\psi(\lambda, t)\omega(v_2 - v_1), & per \ t < \sigma(\lambda), \end{matrix} \right.$$

in S e per v_2 e v_1 appartenenti all'intervallo $(-N, N)$ e tali che sia $v_2 > v_1$, essendo:

$\omega(u)$ una funzione continua per $u \geq 0$, tale che $\omega(0) = 0$, $\omega(u) > 0$ per $u > 0$, e

$$\lim_{\mu \to +0} \int_{\mu}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \qquad 0 < u_0; \tag{4}$$

$\psi(\lambda, t)$ una funzione definita in R, non inferiore ad 1, come funzione di t sommabile nell'intervallo (c, d) e tale da aversi:

$$\int_c^d \psi(\lambda, t)dt \leq L, \tag{5}$$

essendo L una costante positiva indipendente da λ.

Facciamo, quindi, vedere che vale il seguente teorema:

II. - *Se $\sigma(\lambda)$ è una funzione continua in (a, b) e verificante la* (2) *e se $F(\lambda, t, v, w_1, \dots w_k)$ è una funzione per la quale vale l'ipotesi* a'), *le soluzioni $v(\lambda, t)$ del problema* (3), *ottenute ciascuna in corrispondenza di una k–upla $[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k]$ di funzioni appartenenti ad un insieme Φ_1 di funzioni equilimitate in R, ivi equicontinue rispetto a λ, uniformemente rispetto a t, e soltanto continue rispetto a t, e di una fissata funzione $\tau(\lambda)$ appartenente ad un insieme T di funzioni equilimitate ed equicontinue in (a, b), risultano equicontinue in R.*

Evidentemente basterà provare che le $v(\lambda, t)$ sono equicontinue in R separatamente rispetto a ciascuna delle variabili ed uniformemente rispetto all'altra. Ora che le $v(\lambda, t)$ siano equicontinue rispetto a t in R, uniformemente rispetto a λ, è ovvio, una volta che si sia tenuto conto della (1). Per quanto riguarda la equicontinuità rispetto a λ eseguiremo la dimostrazione ragionando per assurdo. Supponiamo che le $v(\lambda, t)$ non siano equicontinue rispetto a λ, uniformemente rispetto a t, allora esiste un $\varepsilon > 0$ in corrispondenza del quale è possibile determinare due successioni $\{\lambda_n\}$ e $\{\lambda'_n\}$ di valori di λ, convergenti al medesimo limite, e una successione $\{v_n(\lambda, t)\}$ di soluzioni del problema (3) per le quali, in almeno un punto t_n di (c, d), abbiamo:

$$(6) \qquad |v_n(\lambda_n, t_n) - v_n(\lambda'_n, t_n)| \geq \varepsilon.$$

Cominciamo col mostrare che $t_n \neq \sigma(\lambda_n)$. Invero, poichè è

$$|v_n[\lambda_n, \sigma(\lambda_n)] - v_n[\lambda'_n, \sigma(\lambda_n)]| \leq |v_n[\lambda_n, \sigma(\lambda_n)] - v_n[\lambda'_n, \sigma(\lambda'_n)]| +$$
$$+ |v_n[\lambda'_n, \sigma(\lambda'_n)] - v_n[\lambda'_n, \sigma(\lambda_n)]| = |\tau(\lambda_n) - \tau(\lambda'_n)| +$$
$$+ |v_n[\lambda'_n, \sigma(\lambda'_n)] - v_n[\lambda'_n, \sigma(\lambda_n)]|,$$

comunque si fissa $h > 0$, data la continuità di $\sigma(\lambda)$ e l'equicontinuità delle $\tau(\lambda)$ e delle $v(\lambda, t)$ rispetto a t, è possibile determinare un indice ν tale che per $n > \nu$ si abbia:

$$(7) \qquad |v_n[\lambda_n, \sigma(\lambda_n)] - v_n[\lambda'_n, \sigma(\lambda_n)]| < \frac{h}{2},$$

e da questa, tenuta presente la (6), si deduce che non può aversi $t_n = \sigma(\lambda_n)$.

Ora per il seguito ci è utile fissare $h < \varepsilon$ in modo tale che sia:

$$\int_h^\varepsilon \frac{du}{\omega(u)} > L,$$

cosa questa possibile dato che vale la (4).

Ricordiamo che per quanto è stato visto [5] in (N), considerata

[5] Cfr. loco cit. in [1], pag. 23.

la funzione di σ:

$$\varkappa(\sigma) = \int_h^\varepsilon \frac{du}{\omega(u) + \sigma},$$

è possibile determinare un valore $\sigma_1 > 0$ di σ tale che si abbia:

$$(8) \qquad \varkappa(\sigma) > L, \qquad 0 \leq \sigma < \sigma_1.$$

Supporremo ora che sia $t_n > \sigma(\lambda_n)$, rilevando che nel caso in cui è $t_n < \sigma(\lambda_n)$ si procederebbe in maniera del tutto analoga.

Posto:

$$V_n(t) = v_n(\lambda_n, t) - v_n(\lambda'_n, t),$$

rileviamo che siccome $V_n(t)$ è una funzione continua di t in (c, d) e dato che per la (6) è $V_n(t_n) \neq 0$ esisterà tutto un intorno di t_n in cui è $V_n(t) \neq 0$. Supposto che si abbia:

$$(9) \qquad V_n(t_n) \geq \varepsilon,$$

e ricordato che è $\varepsilon > h$, esisterà quindi un massimo intervallo, $(t_n - \delta_1, t_n + \delta_2)$, dove è $\delta_1 > 0$, $\delta_2 \geq 0$ e contenuto in (c, d), nell'interno del quale e tutto al più anche nell'estremo destro (nel caso in cui è $t_n = d$, $\delta_2 = 0$) è $V_n(t) > h$. Tenuto conto della (7) rileviamo che l'estremo $t_n - \delta_1$, nel quale è:

$$(10) \qquad V_n(t_n - \delta_1) = h,$$

è certamente $> \sigma(\lambda_n)$, cioè si ha: $\delta_1 < t_n - \sigma(\lambda_n)$.

È evidente poi che in tutto l'intervallo $(t_n - \delta_1, t_n + \delta_2)$, estremi inclusi, risulta $V_n(t) > 0$ e quindi:

$$v_n(\lambda_n, t) > v_n(\lambda'_n, t).$$

Ora seguendo un ragionamento svolto nel dimostrare (6) il teorema II di (N), fissato che sia un $\sigma > 0$ e $< \sigma_1$, possiamo trovare un indice ν abbastanza grande tale che per $n > \nu$ si abbia:

$$(11) \qquad V'_n(t) \leq \psi(\lambda_n, t) \{ \omega[V_n(t)] + \sigma \}, \quad t_n - \delta_1 \leq t \leq t_n + \delta_2.$$

(6) Cfr. loco cit. in (1), pag. 23.

Nella (11) dividendo per $\omega[V_n(t)] + \sigma$ e integrando fra $t_n - \delta_1$ e t_n abbiamo:

$$\int_{V_n(t_n-\delta_1)}^{V_n(t_n)} \frac{du}{\omega(u) + \sigma} \leq \int_{t_n-\delta_1}^{t_n} \psi(\lambda_n, t) dt,$$

da cui, tenute presenti le (9), (10) e (8), segue:

$$L < \int_c^d \psi(\lambda_n, t) dt,$$

in evidente contrasto con la (5).

Infine nel caso in cui è $V_n(t_n) \leq -\varepsilon$ si ragionerebbe allo stesso modo, prendendo a considerare, però, la funzione $-V_n(t)$.

Il teorema resta così pienamente dimostrato.

2. Vogliamo ora stabilire un teorema di esistenza relativo al problema enunciato in A) e per questo ci occorrerà fare le seguenti ipotesi:

b′) Siano C_1 e C_2 due archi di curve, il primo incontrato al più una volta da ogni parallela all'asse y e il secondo incontrato al più una volta da ogni parallela all' asse x. Essi siano contenuti interamente nel rettangolo formato dalle parallele all'asse y per i due estremi di C_1 e dalle parallele all' asse x per i due estremi di C_2. I due archi C_1 e C_2 abbiano un sol punto in comune che assumeremo come origine delle coordinate e le loro equazioni siano le seguenti:

$$C_1: \quad y = \alpha(x) \quad a \leq x \leq b,$$

$$C_2: \quad x = \beta(y) \quad c \leq y \leq d,$$

dove $\alpha(x)$ e $\beta(y)$ sono funzioni continue e per le ipotesi fatte è:

$$c \leq \alpha(x) \leq d \quad a \leq x \leq b; \quad a \leq \beta(y) \leq b \quad c \leq y \leq d; \quad \alpha(0) = \beta(0) = 0,$$

e il rettangolo $R \equiv [a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d]$ è quello contenente interamente C_1 e C_2.

c′) $f(\lambda, t, w_1, v, w_2)$ sia una funzione definita nello strato

$$S_1: \quad (\lambda, t) \in R, \quad |v|, |w_1|, |w_2| < +\infty,$$

ivi continua e tale da verificare la limitazione:

$$|f(\lambda, t, w_1, v, w_2)| \leq K, \tag{12}$$

con K costante non negativa;

d′) La funzione

$$F(\lambda, t, v, w_1, w_2) = f(\lambda, t, w_1, v, w_2)$$

verifichi l'ipotesi a′);

e′) $f(\lambda, t, w_1, v, w_2)$ soddisfi anche ad un qualsiasi gruppo di condizioni tali da assicurare il sussistere del teorema di unicità per il problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial \lambda} = f[\lambda, t, z(\lambda, t), v(\lambda, t), w(\lambda, t)], \\ w[\beta(t), t] = \tau(t), \end{cases}$$

comunque si assegnino $z(\lambda, t)$ e $v(\lambda, t)$ definite e continue in R e $\tau(t)$ definita e continua in (c, d).

Dimostriamo allora il seguente teorema

III. – *Siano* $\alpha(x)$ *e* $\beta(y)$ *le funzioni definite in* b′) *e verifichino le ipotesi ivi poste, inoltre entrambe siano dotate di derivata prima continua; sia* $f(\lambda, t, w_1, v, w_2)$ *una funzione per la quale valgono le ipotesi* c′), d′) *ed* e′); *inoltre sia* $\mu(x)$ *una funzione continua in* (a, b) *e* $\nu(x)$ *una funzione continua con la sua derivata prima in* (c, d).

Allora esiste una funzione $z(x, y)$ *continua in* R *con le derivate* $p(x, y)$, $q(x, y)$, $s(x, y)$ *soluzione del problema*:

$$\begin{cases} s = f(x, y, z, p, q) \qquad \text{in } R, \\ p[x, \alpha(x)] = \mu(x), \; z[\beta(y), y] = \nu(y). \end{cases} \tag{13}$$

La dimostrazione è sostanzialmente analoga a quella svolta nel caso del teorema III di (N).

Indichiamo con Σ lo spazio delle funzioni $z(x, y)$ continue in R insieme alle loro derivate p, q, s, normalizzato con la posizione:

$$\| z \| = max_R |z| + max_R |p| + max_R |q| + max_R |s|. \tag{14}$$

Definiamo ora una trasformazione funzionale al seguente modo.

Assegnata una funzione $z(x, y)$ di Σ, consideriamo il problema:

$$
(15) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = f[x,\ y,\ z(x,y),\ v(x,y),\ q(x,y)] \quad \textit{in } R, \\ v[x,\ \alpha(x)] = \mu(x), \end{cases}
$$

esso in base all' ipotesi d') ammette soluzione unica. Ottenuta la soluzione $v(x, y)$ del problema (15), consideriamo il problema:

$$
(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = f\,[x,\ y,\ z(x,y),\ v(x,y),\ w(x,y)] \quad \textit{in } R, \\ w[\beta(y),\ y] = \nu'(y) - v[\beta(y),\ y]\beta'(y), \end{cases}
$$

che anche ammette soluzione unica in base all' ipotesi e').

Ottenuta la soluzione $w(x, y)$ del problema (16), poniamo:

$$
(17) \qquad z'(x,y) = \int_{\alpha(x)}^{y} w(x,t)dt + \int_0^x \mu(t)dt + \int_0^x w[t,\alpha(t)]\alpha'(t)dt + \nu(0).
$$

Al variare di $z(x\ y)$ in Σ evidentemente viene a porsi una corrispondenza fra ogni $z(x, y)$ e la $z'(x, y)$ data dalla (17), per cui rimane definita in Σ una trasformazione funzionale che indicheremo al seguente modo:

$$
(18) \qquad z' = T(z).
$$

Naturalmente $z'(x,y)$ appartiene anch' essa a Σ.

Calcolando, ora, le espressioni di $p'(x,y)$, $q'(x,y)$ e $s'(x,y)$, abbiamo:

$$
(19) \quad p'(x,y) = \int_{\alpha(x)}^{y} w_x(x,t)dt + \mu(x), \qquad q'(x,y) = w(x,y), \qquad s'(x,y) = w_x(x,y),
$$

e si ha in ogni caso $p'[x,\alpha(x)] = \mu(x)$, mentre se fosse $z' \equiv z$ si avrebbe: $w(x,y) = q(x,y), v(x,y) = p(x,y), z'[\beta(y),y] = z[\beta(y),y] = \nu(y)$.

Da ciò risulta evidente che il problema (13) è equivalente all' equazione funzionale:

$$
z = T(z).
$$

Quindi il teorema di esistenza per il problema (13) si muta in quello equivalente dell' esistenza di almeno un punto unito nella trasformazione (18).

Ora non è difficile vedere che la (18) trasforma lo spazio Σ in una sua porzione limitata, quindi, se proveremo che essa è completamente continua, l'esistenza di almeno un punto unito è assicurata dal teorema di BROUWER.

Invero, poichè le z appartenenti ad un insieme limitato I di Σ sono equilimitate con le z_y in R, e ivi le z risultano equicontinue, mentre le z_y sono equicontinue rispetto ad x, uniformemente rispetto a y e soltanto continue rispetto a y, in base alla condizione d') e al risultato stabilito nel teorema II si vede subito che le funzioni $v(x, y)$, soluzioni del problema (15), ottenute ciascuna in corrispondenza di una fissata z di Σ, sono equicontinue in R. Tenuto conto di ciò, in base all'ipotesi e') e al risultato stabilito nel teorema I abbiamo che le funzioni $w(x, y)$ soluzioni del problema (16), ottenute ciascuna in corrispondenza di una fissata z di I e della v ricavata come soluzione del problema (15), sono equicontinue in R, tenuto conto della (12), abbiamo che anche le $w_x(x, y)$ sono equicontinue in R. In base a quanto ora abbiamo rilevato, tenute presenti le (17), (19) e (12), possiamo quindi dire che le z' corrispondenti alle z di un insieme limitato I di Σ risultano equicontinue insieme alle loro derivate p', q', s'. e inoltre esse risultano anche equilimitate, dato che I viene mutato dalla (18) in un insieme limitato. Da ciò risulta che per il teorema di ASCOLI–ARZELA la (18) muta insiemi limitati in insiemi compatti, e siccome la (18) stessa è continua, come ben può vedersi con ragionamento identico a quello svolto nello stabilire [7] il teorema IV di (N), ne viene che essa è ivi anche completamente continua.

Il teorema è così dimostrato.

3. Vogliamo ora stabilire un teorema di esistenza relativo al problema enunciato in B). Vale il seguente teorema:

IV. – *Siano* $\alpha(x)$ *e* $\beta(y)$ *le funzioni definite in* b') *e verifichino le ipotesi ivi poste, inoltre* $\alpha(x)$ *sia dotata di derivata prima continua; sia* $f(\lambda, t, w_1, v, w_2)$, *una funzione per la quale valgono le ipotesi* c'), d') *ed* e'); *inoltre* $\mu(x)$ *e* $\nu(y)$ *siano due funzioni continue rispettivamente negli intervalli* (a, b) *e* (c, d).

Allora esiste una funzione $z(x, y)$ *continua in* R *con le sue derivate* $p(x, y)$, $q(x, y)$, $s(x, y)$ *soluzione del problema:*

$$(20) \qquad \begin{cases} s = f(x, y, z, p, q) & \text{in } R, \\ p[x, \alpha(x)] = \mu(x), \quad q[\beta(y), y] = \nu(y), \quad z(x_0, y_0) = z_0, \end{cases}$$

[7] Cfr. loco cit. in [1]. pagg. 27-28.

dove (x_0, y_0) *è un assegnato punto di* R *e* z_0 *è una costante assegnata.*

Considerato il solito spazio Σ normalizzato con la posizione (14) si definisce una trasformazione funzionale al seguente modo.

Assegnata una funzione $z(x, y)$ di Σ si considera il problema (15), da questo ottenuta la soluzione $v(x, y)$ si considera il seguente altro problema:

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = f[x,\ y,\ z(x, y),\ v(x, y),\ w(x, y)] \quad \textit{in } R, \\ w[\beta(y),\ y] = \nu(y), \end{cases}$$

che ammette soluzione unica in base all'ipotesi e'). Ottenuta la soluzione $w(x, y)$ del problema (21), poniamo:

$$(22)\quad z'(x, y) = \int_{\alpha(x)}^{y} w(x,\ t)dt + \int_{x_0}^{x} \mu(t)dt + \int_{x_0}^{x} w[t,\ \alpha(t)]\alpha'(t)dt + \int_{y_0}^{\alpha(x_0)} w(x_0,\ t)dt + z_0 .$$

Ora al variare di z in Σ viene a porsi una corrispondenza fra ogni z di Σ e la z' data dalla (22), così, come nel caso del teorema III, ci siamo ricondotti ad una trasformazione funzionale del tipo della (18). Di qui si prosegue e conclude in maniera perfettamente analoga a quella svolta nel dimostrare il teorema III.

4. Si vede immediatamente che entrambi i teoremi III e IV forniscono due teoremi di esistenza per il problema di CAUCHY relativo all'equazione (I) allorquando i due archi C_1 e C_2 definiti in b') coincidono. In tal caso, per il modo stesso col quale abbiamo definito C_1 e C_2, abbiamo che $\alpha(x)$ e $\beta(y)$ dovranno essere funzioni entrambe o crescenti o decrescenti, e quindi, data la loro continuità, l'una funzione inversa dell'altra.

Osserviamo ancora che i teoremi di esistenza stabiliti in questa nota sarebbero suscettibili di una generalizzazione analoga a quella che per il problema di DARBOUX abbiamo dato in altro lavoro [8]. Si può cioè alla limitazione (12) sostituire una del tipo:

$$|f(\lambda,\ t,\ w_1,\ v,\ w_2)| \leq A\,(|v| + |w_1| + |w_2|) + K,$$

con A positiva sufficientemente piccola e K non negativa.

[8] C. CILIBERTO, *Sul problema di Darboux per l'equazione* $s = f(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$. « Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli », ser. 4, vol. XXII (1955).