

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

DONATO GRECO

## Sul problema di Lauricella per una particolare equazione del quarto ordine.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol.*  
11 (1956), n.3, p. 394–401.

Zanichelli

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1956\\_3\\_11\\_3\\_394\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_394_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

# Sul problema di Lauricella per una particolare equazione del quarto ordine.

Nota di DONATO GRECO (a Napoli)

**Sunto.** - Come nella prefazione.

In un lavoro attualmente in corso di stampa <sup>(1)</sup>, e che qui indicherò con il riferimento [A], ho studiato il problema della derivata obliqua per alcuni sistemi di equazioni ellittiche del secondo ordine in due variabili ed in  $m$  funzioni incognite.

La presente Nota ha lo scopo di mostrare come i risultati conseguiti in [A] consentano di trattare il problema di LAURICELLA relativo ad un'equazione del quarto ordine a coefficienti costanti, che contenga le sole derivate quarte e non si riduca all'equazione  $\Delta_4 u = 0$ , indipendentemente dalla teoria generale delle equazioni del quarto ordine a coefficienti variabili, ciò che per l'equazione delle funzioni biarmoniche è stato già fatto in vari modi.

Il procedimento, che presuppone acquisito il teorema di unicità per il problema di LAURICELLA <sup>(2)</sup>, permette di stabilire molto rapidamente, e con considerazioni elementari, il teorema di esistenza portando altresì a riconoscere che la soluzione del problema stesso è sempre rappresentabile come somma di due opportuni potenziali di semplice strato.

1. Sia  $T$  un dominio del piano  $x = (x_1, x_2)$  che supporremo di classe  $A^{(4, \lambda)}$  e semplicemente connesso, cioè limitato da una curva semplice e chiusa, di equazioni parametriche

$$x_1 = \varphi_1(s), \quad x_2 = \varphi_2(s) \quad [x = \varphi(s)]$$

riferite all'arco  $s$ , con le  $\varphi_i(s)$  funzioni dotate di derivate quarte  $\lambda$ -hölderiane ( $0 < \lambda \leq 1$ ) nel tratto  $[0, \Lambda]$ , se  $\Lambda$  è la lunghezza di  $\mathcal{F}T$ , le  $\varphi_i(s)$  e le loro derivate dei primi quattro ordini riuscendo periodiche di periodo  $\Lambda$ . Supporremo che il verso delle  $s$  crescenti

(1) D. GRECO, *Il problema di derivata obliqua per certi sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo ellittico in due variabili*. « Annali di Matematica pura ed appl. » (in corso di stampa).

(2) E. E. LEVI, *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, « Mem. Soc. It. dei XL », tomo 16 (1909), pp. 1-112.

sia quello positivo di percorso su  $\mathcal{F}T$  ed indicheremo con  $n$  l'asse normale esterno, di coseni direttori  $X_1(s), X_2(s)$ , con  $\tau$  l'asse tangente orientato coerentemente.

Sia poi  $\mathcal{L}$  un operatore differenziale lineare del quarto ordine a coefficienti costanti, che contenga le sole derivate quarte:

$$\mathcal{L} = \sum_{h+k=4} A_{h,k} \frac{\partial^4}{\partial x_1^h \partial x_2^k}$$

e sia di tipo ellittico, cioè tale che la forma quartica in due variabili

$$\Phi[t_1, t_2] = \sum_{h+k=4} A_{h,k} t_1^h t_2^k$$

risulti definita positiva.

Assegnate su  $\mathcal{F}T$ , due funzioni  $f_1(x), f_2(x)$  con  $f_1(x) \in C_{\mathcal{F}}^{(1, \lambda)}$ ,  $f_2(x) \in C_{\mathcal{F}}^{(0, \lambda)}$  ( $0 < \lambda < 1$ ), ci proponiamo qui di applicare la teoria svolta in [A] allo studio del classico problema di LAURICELLA consistente nel *determinare una funzione  $u(x)$  che riesca di classe  $C^{(1)}$  in  $T$ , di classe  $C^{(4)}$  in  $T - \mathcal{F}T$ , che verifichi l'equazione*

$$(1) \quad \mathcal{L}u = 0 \quad \text{per } x \in T - \mathcal{F}T$$

e le condizioni al contorno

$$(2) \quad u = f_1, \frac{du}{dn} = f_2 \quad \text{per } x \in \mathcal{F}T.$$

2. La forma quartica  $\Phi$  può ovviamente decomorsi nel prodotto di due forme quadratiche definite positive e, disponendo del fattore moltiplicativo a meno del quale è definito l'operatore  $\mathcal{L}$ , si può sempre fare in modo che tali forme quadratiche siano entrambe a discriminante unitario.

Alla decomposizione della forma  $\Phi$  corrisponde una decomposizione dell'operatore  $\mathcal{L}$  in due operatori ellittici sovrapposti del secondo ordine a coefficienti costanti, contenenti le sole derivate seconde e, a meno di un cambiamento di variabili, si potrà sempre supporre che uno di tali operatori si riduca al laplaciano, cioè che riesca:

$$\mathcal{L} = \mathfrak{N}\Delta_2,$$

con

$$\mathfrak{N} = a_{1,1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2a_{1,2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{2,2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

ove, come già detto,  $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2 = 1$ .

Orbene noi supporremo che riesca  $\mathfrak{N} \neq \Delta_2$  cioè che l'operatore  $\mathcal{L}$  non sia il quadrato di un operatore ellittico del secondo ordine.

Indicando allora, per ogni  $x = \varphi(s) \in \mathcal{F}T$ , con  $\nu$  l'asse conormale esterno associato all'operatore  $\mathfrak{N}$ , di coseni direttori:

$$(3) \quad \xi_n(x) = [a_{n,1} X_1(x) + a_{n,2} X_2(x)] a^{-1}(x),$$

riesce, ovunque su  $\mathcal{F}T$ :

$$(4) \quad a(x) \cos(n, \nu) = a_{1,1} X_1^2(x) + 2a_{1,2} X_1(x) X_2(x) + a_{2,2} X_2^2(x)$$

ed inoltre:

$$(5) \quad a(x) \sin(n, \nu) = a_{1,1} X_1^2(x) + (a_{2,2} - a_{1,1}) X_1(x) X_2(x) - a_{2,2} X_2^2(x).$$

Dette  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  due funzioni di classe  $C^{(1)}$  in  $T$ , di classe  $C^{(2)}$  in  $T - \mathcal{F}T$ , soluzioni, rispettivamente, delle equazioni

$$(6) \quad \Delta_2 u_1 = 0, \quad \mathcal{M} \zeta u_2 = 0,$$

e posto

$$(7) \quad u(x) = u_1(x) + u_2(x),$$

si ha allora

$$\mathcal{L}u = 0$$

e la  $u(x)$ , definita dalla (7), è soluzione dell'equazione (1).

Proponiamoci allora di risolvere il problema (1)-(2) cercandone la soluzione nella forma (7). Osservando che, per essere  $\tau$  ed  $n$  assi ortogonali si ha

$$\frac{du_2}{dn} = \frac{1}{\cos(n, \nu)} \frac{du_2}{d\nu} + \operatorname{tg}(n, \nu) \frac{du_2}{ds},$$

le condizioni al contorno (2) divengono

$$(8_1) \quad u_1 + u_2 = f_1,$$

$$(8_2) \quad \frac{du_1}{dn} + \frac{1}{\cos(n, \nu)} \frac{du_2}{d\nu} + \operatorname{tg}(n, \nu) \frac{du_2}{ds} = f_2.$$

Pertanto determinare una soluzione del problema (1)-(2) rappresentabile nella forma (7) equivale a determinare una soluzione  $[u_1(x), u_2(x)]$  del sistema di due equazioni (6) verificante le condizioni al contorno (8).

Procedendo come in [A], per tradurre il problema in un sistema di equazioni integrali si rappresenta la funzione incognita  $u_j(x)$  mediante un potenziale di semplice strato:

$$(9) \quad u_j(x) = \int_{\mathcal{F}T} G_j(x, y) \zeta_j(y) ds_y$$

dove  $G_1(x, y)$ ,  $G_2(x, y)$  sono, rispettivamente, soluzioni fondamen-

tali delle due equazioni (6) <sup>(3)</sup>. Assunte come incognite le due densità  $\zeta_1(x)$ ,  $\zeta_2(x)$  si riconosce allora che il problema (6)-(8) porta ad un sistema di equazioni integrali lineari delle quali la seconda è un'equazione a valor principale, mentre la prima è un'equazione tipo FREDHOLM ordinaria ma di prima specie. Ad un sistema siffatto non si applica la teoria generale dei sistemi di equazioni integrali a valor principale.

Per ovviare a tale inconveniente e poter tradurre il problema in un sistema di equazioni integrali a valor principale cui sia applicabile la teoria generale, in modo quindi che il problema di cui trattiamo rientri in quelli studiati in [A], basta modificare lievemente le condizioni al contorno (8) scrivendone la prima in modo diverso. Invero, avendo supposto  $f_1(x) \in C_{\mathcal{F}}^{(1, \lambda)}$  e dovendo le funzioni  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  essere di classe  $C^{(1)}$  in  $T$ , dalla (8<sub>1</sub>), per derivazione, si trae l'altra

$$(10) \quad \frac{du_1}{ds} + \frac{du_2}{ds} = \frac{df_1}{ds}.$$

Il problema al contorno relativo al sistema (6) ed alle condizioni al contorno (10) ed (8<sub>2</sub>) viene così a rientrare in quelli studiati in [A] in quanto avendosi, con le notazioni [A],

$$p_{1,1} = p_{1,2} = 0, \quad p_{2,1} = 1, \quad p_{2,2} = \frac{1}{a \cos(n, \nu)}$$

$$\alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = 1, \quad \alpha_{2,1} = 0, \quad \alpha_{2,2} = \operatorname{tg}(n, \nu),$$

il determinante che in [A] è stato indicato con  $D(x)$ :

$$(11) \quad D(x) = \det \| p_{h,k}(x) - i\alpha_{h,k}(x) \| = - \frac{a \operatorname{sen}(n, \nu) + i[1 - a \cos(n, \nu)]}{a \cos(n, \nu)}$$

non si annulla mai su  $\mathcal{F}T$  <sup>(4)</sup>.

<sup>(3)</sup> Si può porre

$$G_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{xy}, \quad G_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{\tau(x, y)},$$

essendo

$$\tau(x, y) = a_{1,1}(x_2 - y_2)^2 - 2a_{1,2}(x_2 - y_2)(x_1 - y_1) + a_{2,2}(x_1 - y_1)^2.$$

Nel caso attuale, poichè le condizioni al contorno (8<sub>2</sub>) — (10) non contengono le funzioni incognite  $u_j(x)$ , non occorre assumere come funzioni  $G_j(x, y)$  le soluzioni fondamentali principali della (6), come è stato fatto in [A].

<sup>(4)</sup> Invero l'essere  $D(x) = 0$ , in un punto  $x \in \mathcal{F}T$ , implica che in  $x$  si abbia  $\operatorname{sen}(n, \nu) = 0$ ,  $a \cos(n, \nu) = 1$ , cioè  $\nu \equiv n$  ed  $a = 1$ . Tali condizioni implicando  $\xi_k = X_k$ , le quantità  $X_k$  si presentano allora, per le (3), come soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee che, per essere  $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2 = 1$ , ha determinante non nullo ed è quindi incompatibile con la relazione  $X_1^2 + X_2^2 = 1$ .

Peraltro, essendo  $p_{1,1} = p_{1,2} = 0$ , il problema (6)-(10)-(8<sub>2</sub>) rientra nel caso che in [A] è stato classificato come eccezionale.

Osserviamo ora che, per essere  $T$  di classe  $A^{(4,\lambda)}$  e per la (4) riesca  $p_{h,\lambda} \in C_{\mathcal{F}}^{(3,\lambda)}$ ,  $\alpha_{h,\lambda} \in C_{\mathcal{F}}^{(3,\lambda)}$  onde del problema (6)-(10)-(8<sub>2</sub>) si può considerare il problema aggiunto omogeneo. Tale problema, secondo la definizione che di esso si è data in [A], e per essere gli operatori (6) autoaggiunti, consiste nel determinare due coppie di funzioni  $[v_1(x), v_2(x)]$ ,  $[\mathfrak{z}_1(x), \mathfrak{z}_2(x)]$  di cui le  $v_i(x)$  definite in  $T$ , ivi di classe  $C^{(1)}$  e di classe  $C^{(2)}$  in  $T - \mathcal{F}T$ , le  $\mathfrak{z}_i(x)$  definite su  $\mathcal{F}T$  e di classe  $C_{\mathcal{F}}^{(1)}$ , in modo che le  $v_i(x)$  siano soluzioni, in  $T - \mathcal{F}T$ , del sistema

$$(6') \quad \Delta_2 v_1 = 0, \quad \mathfrak{N}v_2 = 0$$

e verifichino le condizioni al contorno

$$(8') \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = -\mathfrak{z}_2, \quad v_2 = -p_{1,2}\mathfrak{z}_2 \\ \frac{dv_1}{dn} = -\frac{d\mathfrak{z}_1}{ds}, \quad a \frac{dv_2}{dv} = -\frac{d}{ds} [\mathfrak{z}_1 + \alpha_{2,2}\mathfrak{z}_2]. \end{array} \right.$$

Il problema aggiunto omogeneo, così definito, è equivalente, come si è visto in [A], al sistema omogeneo trasposto del sistema di equazioni integrali a valor principale che traduce il problema (6)-(10)-(8<sub>2</sub>).

3. L'espressione (11) si presta agevolmente al calcolo dell'indice  $\kappa$  del problema (6)-(10)-(8<sub>2</sub>) il cui valore, determinato in [A], è

$$\kappa = \frac{1}{\pi} [\arg D(x)]_{\mathcal{F}T}.$$

Tenuto conto del fatto che la quantità  $a \cos(n, \nu)$  è sempre positiva su  $\mathcal{F}T$ , posto

$$(12) \quad \xi(x) = a \operatorname{sen}(n, \nu), \quad \eta(x) = 1 - a \cos(n, \nu),$$

riesce

$$(13) \quad \kappa = \frac{1}{\pi} [\arg \{ \xi(x) + i\eta(x) \}]_{\mathcal{F}T}.$$

Il calcolo di  $\kappa$  è dunque ricondotto a quello dell'ordine topologico dell'origine rispetto alla curva  $\Gamma$  descritta dalla variabile complessa

$$(14) \quad z(x) = \xi(x) + i\eta(x)$$

quando il punto  $x$  descrive  $\mathcal{F}T$ , una ed una sola volta, nel verso positivo.

Ora se si deforma con continuità  $\mathcal{F}T$  anche  $\Gamma$  si deforma con continuità, ma in tale deformazione  $\Gamma$  non viene mai a passare per l'origine in quanto, come si è già visto, è sempre  $D(x) \neq 0$ . Ne segue che  $x$  si mantiene costante al variare di  $\mathcal{F}T$ . Naturalmente bisogna supporre che  $\mathcal{F}T$  varii mantenendosi sufficientemente regolare. In ogni caso però possiamo calcolare  $x$  supponendo che  $\mathcal{F}T$  sia la circonferenza unitaria  $\gamma$ , ciò che equivale ad assumere come variabili indipendenti le quantità  $X_1$  ed  $X_2$ . Con ciò le funzioni  $\xi(x)$  ed  $\eta(x)$  risultano definite, tramite le (4) e (5), in tutto il piano  $X_1, X_2$  e, avendosi  $\mathcal{N} \neq \Delta_2$ , le equazioni

$$\eta = 0, \quad \xi = 0$$

rappresentano, nel piano  $X_1, X_2$ , la prima un'ellisse  $\sigma$  e la seconda una coppia di rette ortogonali che coincidono con gli assi di  $\sigma$ . Detti  $\rho_1$  e  $\rho_2$  i semiassi, maggiore e minore, di  $\sigma$ , dalle ipotesi fatte sui coefficienti dell'operatore  $\mathcal{N}$  segue  $\rho_2 < 1 < \rho_1$  onde  $\sigma$  incontra la circonferenza unitaria  $\gamma$  in quattro punti distinti.

Diciamo  $P_1, P_5$  e  $P_3, P_7$ , rispettivamente, i punti d'intersezione di  $\gamma$  con gli assi, maggiore e minore, di  $\sigma$ , ed indichiamo con  $P_2, P_4, P_6, P_8$  i punti comuni a  $\gamma$  ed a  $\sigma$ , ordinati in modo che nella permutazione fondamentale  $P_1, \dots, P_8$  i punti  $P_i$  si seguano ciclicamente nel verso positivo su  $\mathcal{F}T$ .

Le funzioni  $\eta$  e  $\xi$  si annullano, cambiando segno, la prima nei punti  $P_i$  d'indice pari e la seconda nei punti  $P_i$  d'indice dispari, laddove su ogni arco di  $\gamma$  limitato da due di tali punti conservano segno costante.

Ciò conduce subito a riconoscere che la curva  $\Gamma$  descritta dalla variabile complessa  $z$ , quando il punto  $x$  descrive una ed una sola volta  $\gamma$  nel verso positivo su  $\mathcal{F}T$ , si riduce ad un contorno che si avvolge due volte attorno all'origine nel verso positivo. L'ordine topologico dell'origine rispetto a  $\Gamma$  è dunque 2 cioè la variazione dell'argomento di  $\xi + i\eta$  è  $4\pi$ .

Se ne deduce per l'indice  $x$  il valore

$$(15) \quad x = 4.$$

4. Il numero  $x$  rappresenta la differenza tra il numero delle soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo associato al sistema integrale che traduce il problema (6)-(10)-(8<sub>2</sub>) ed il numero delle soluzioni del sistema omogeneo trasposto. Il primo di tali sistemi traduce, ovviamente, il problema omogeneo associato al problema (7)-(10)-(8<sub>2</sub>), definito dalle condizioni al contorno

$$(8'') \quad \frac{du_1}{dn} + \frac{du_2}{dn} = 0, \quad \frac{du_1}{ds} + \frac{du_2}{ds} = 0.$$

Ora, se  $[\zeta_1(x), \zeta_2(x)]$  è una soluzione del sistema integrale omogeneo che traduce il problema (6)-(8''), le  $u_i(x)$  definite dalla (9) forniscono, tramite la posizione (7), una soluzione dell'equazione (1) verificante le condizioni al contorno

$$\frac{du}{dn} = 0, \quad \frac{du}{ds} = 0$$

dalla quale si trae:

$$\frac{du}{dn} = 0, \quad u = C, \quad \text{per } x \in \mathcal{FT},$$

con  $C$  costante.

Dal teorema di unicità per le equazioni del quarto ordine <sup>(5)</sup> si deduce dunque:

$$(16) \quad u_1(x) + u_2(x) = C, \quad \text{per } x \in T.$$

Dalla (16) pertanto si trae che le soluzioni linearmente indipendenti del sistema integrale omogeneo danno luogo a soluzioni comuni alle due equazioni (6). La ricerca di queste ultime si effettua subito osservando che se si interpreta il sistema

$$\Delta_2 u = 0, \quad \mathcal{N}u = 0$$

come un sistema lineare nelle incognite  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ , si trova:

$$(17) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -2\rho a_{1,2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \rho(a_{1,1} - a_{2,2}), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 2\rho a_{1,2}$$

essendo  $\rho$  un fattore di proporzionalità. Dalle condizioni di compatibilità delle (17) segue  $\frac{\partial \rho}{\partial x_1} = \frac{\partial \rho}{\partial x_2} = 0$ , cioè  $\rho = \text{costante}$ .

Se ne deduce, per la soluzione comune alle due equazioni (6), l'espressione generale:

<sup>(5)</sup> Cfr. LEVI, loc. cit. in <sup>(2)</sup>, pag. 55. Tale teorema di unicità è stato dimostrato da E. E. LEVI considerando soluzioni del problema di classe  $C^{(3)}$  in  $T$ . Ne segue che per applicare correttamente tale teorema bisognerebbe dimostrare che  $u_1(x)$  ed  $u_2(x)$  sono di classe  $C^{(3)}$  in  $T$ . Per questo sarebbe sufficiente far vedere che le funzioni  $\zeta_1(x)$  e  $\zeta_2(x)$  sono di classe  $C_{\mathcal{F}}^{(2, \lambda)}$  e ciò potrebbe stabilirsi con un procedimento simile a quello seguito per la dimostrazione del teorema II di [A]. È appunto per stabilire questa proprietà di regolarità delle  $\zeta_j$  che abbiamo supposto il dominio  $T$  di classe  $A^{(4, \lambda)}$ . Ove invece il teorema di LEVI valesse, come è presumibile, anche per le soluzioni di classe  $C^{(1)}$  sarebbe sufficiente, per applicare il nostro procedimento, supporre che  $T$  sia di classe  $A^{(3)}$ .

$$(18) \quad u(x) = C_1 + C_2x_1 + C_3x_2 + C_4P(x_1, x_2),$$

essendo  $P(x_1, x_2)$  il polinomio di secondo grado

$$P(x_1, x_2) = a_{1,2}(x_2^2 - x_1^2) + (a_{1,1} - a_{2,2})x_1x_2,$$

e le  $C_i$  quattro costanti arbitrarie.

Assunta, nella (16), per la funzione  $u_1(x)$  l'espressione (18), si ha allora  $u_2(x) = C - u_1(x)$ .

Si conclude dunque che, il problema omogeneo (6)-(8'') ammette cinque soluzioni linearmente indipendenti

$$\begin{array}{ll} u_1 = 0 & , \quad u_2 = 1 \\ u_1 = 1 & . \quad u_2 = 0 \\ u_1 = x_1 & , \quad u_2 = -x_1 \\ u_1 = x_2 & , \quad u_2 = -x_2 \\ u_1 = P(x_1, x_2) & , \quad u_2 = -P(x_1, x_2) \end{array}$$

le quali, potendo sempre rappresentarsi nella forma (9), provengono da cinque soluzioni linearmente indipendenti del sistema integrale omogeneo.

Pertanto il sistema integrale omogeneo ammette cinque soluzioni linearmente indipendenti e quindi, essendo l'indice  $\kappa = 4$ , il sistema omogeneo trasposto ammette una ed una sola soluzione non nulla. Tale soluzione è ovviamente rappresentata da

$$(19) \quad \varpi_1 = 1, \quad \varpi_2 = 0,$$

ed essa dà luogo, per il problema omogeneo aggiunto, alla soluzione nulla  $v_1 = v_2 = 0$ .

La presenza della soluzione (19) porta poi ad una sola condizione di compatibilità per il problema (6)-(10)-(8<sub>2</sub>) e questa è espressa da

$$\int_{\mathcal{F}T} \frac{df_1}{ds} ds = 0$$

ed è certo verificata nell'ipotesi, da noi posta,  $f_1(x) \in C_{\mathcal{F}}^{(1, \lambda)}$ .

Si può dunque concludere asserendo che il problema (1) - (2) ammette una ed una sola soluzione la cui esistenza nell'ipotesi  $f_1(x) \in C_{\mathcal{F}}^{(1, \lambda)}$ ,  $f_2(x) \in C_{\mathcal{F}}^{(0, \lambda)}$ , non è subordinata ad alcuna condizione di compatibilità.

Inoltre tale soluzione è sempre rappresentabile come somma di due potenziali di semplice strato.