Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Antonio Rosati

Sul numero dei punti di una superficie cubica in uno spazio lineare finito.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.3, p. 412–418.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_412_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Sul numero dei punti di una superficie cubica in uno spazio lineare finito.

Nota di Luigi Antonio Rosati (a Firenze)

Sunto. - *Si determina il numero dei punti di una vasta classe di superficie cubiche in uno spazio lineare finito. e, come applicazione del metodo usato, si trova, in funzione dei coefficienti, il numero delle soluzioni in un campo di Galois di ordine dispari di equazioni cubiche omogenee in quattro variabili.*

1. Sia $S_{3,q}$ uno spazio lineare finito di dimensione tre, definito sopra un campo di Galois γ di ordine $q = p^h$.

È noto il numero dei punti delle quadriche di $S_{3,q}$, mentre per il numero dei punti delle superficie cubiche si hanno risultati soltanto per casi molto particolari.

Indichiamo con F una superficie cubica irriducibile di $S_{3,q}$ definita in γ e supponiamo $p > 2$.

Noi determiniamo il numero dei punti della F nei casi seguenti:

a) F non è rigata e contiene almeno una retta appartenente a γ;

b) F possiede un punto doppio appartenente a γ;

c) F è rigata;

d) F non è rigata e contiene in una estensione propria di γ due rette sghembe determinate da una equazione di secondo grado a coefficienti in γ.

2. Supporremo in questo paragrafo e nel seguente che la F sia dotata di una retta, r, appartenente a γ. Con riferimento ad un opportuno sistema di coordinate omogenee (x, y, z, t) siano $z = 0$, $t = 0$ le equazioni di r. L'appartenenza di r ad F porta di conseguenza che il primo membro dell'equazione di F divenga identicamente nullo per $z = t = 0$.

L'equazione di F sarà allora del tipo

$$zA_2(x, y, z) + tB_2(x, y, z, t) = 0,$$

essendo $A_2(x, y, z)$ e $B_2(x, y, z, t)$ polinomi di secondo grado omogenei nelle rispettive variabili. Indicando con $\lambda z = \mu t$ l'equazione di un piano generico per la retta r, l' ulteriore intersezione di questo piano con la F è la conica, C, di equazioni

$$(1) \qquad \mu A_2(x,\ y,\ z) + \lambda B_2(x,\ y,\ z,\ t) = 0, \qquad \lambda z = \mu t \text{ (1)}.$$

In particolare $A_2(x,\ y.\ z) = 0$ è l' equazione della conica C_∞ del piano $t = 0$. Se F non è un cono nè una rigata avente per direttrice doppia la retta r, si vede facilmente che la determinazione delle C degeneri dipende dalla risoluzione di un' equazione in μ/λ di grado non superiore a cinque (esattamente di quinto grado se la C_∞ non è degenere) a coefficienti in γ. Dunque, se le C non sono tutte degeneri. fra di esse ve ne sono al massimo cinque degeneri. Inoltre, se F non contiene punti singolari in nessuna estensione di γ, questa equazione è priva di radici multiple e ciascuna delle C degeneri si spezza in due rette distinte (2).

I punti comuni alla C ed alla r, per la (1), sono determinati dal sistema

$$\mu A_2'(x,\ y) + \lambda B_2'(x,\ y) = 0, \qquad z = t = 0,$$

con

$$A_2'(x,\ y) = A_2(x,\ y,\ 0), \qquad B_2'(x,\ y) = B_2(x,\ y,\ 0,\ 0).$$

Se $A_2'(x,\ y) \equiv B_2'(x,\ y) \equiv 0$, ogni conica C contiene r e la F è allora una rigata che ha la retta r per direttrice doppia. Di questo caso ci occuperemo nel n. 5.

Se $A_2'(x, y)$ e $B_2'(x, y)$ non hanno in γ nessuna radice in comune, per ogni punto di r passa una ed una sola conica C. In particolare, se $A_2'(x,\ y)$ e $B_2'(x,\ y)$ hanno in una estensione di γ le due radici in comune, vale a dire se in una estensione di γ la F ha sulla retta r due punti singolari, si ha: $B_2'(x,\ y) = \rho A_2'(x,\ y)$ con ρ in γ, la conica del piano $z + \rho t = 0$ contiene la retta r e nessun altro piano contiene C aventi punti comuni con r.

Se $A_2'(x,\ y)$ e $B_2'(x,\ y)$ hanno in γ le due radici in comune, cioè se sulla retta r esistono due punti singolari della F, ancora si ha: $B_2'(x,\ y) = \rho A_2'(x,\ y)$ con ρ in γ ed ancora la conica del

(1) A proposito della discussione fatta si rilevi che la cubica piana, costituita da tre rette che contengono tutti e sei i punti di una conica Γ di un piano finito sopra un campo di GALOIS di ordine 5, contiene almeno 15 punti; quindi, oltre Γ, almeno altri 9 punti e questi non stanno evidentemente tutti sulla stessa retta.

(2) Cfr. B. SEGRE, *Le rette delle superficie cubiche nei corpi commutativi*, « Boll. U. M. I. », 1949, Serie III, Anno IV, n. 3.

piano $z + \rho t = 0$ contiene r mentre tutte le C passano per i due punti singolari. L' esistenza di 2 punti singolari sulla r, in γ o fuori, porta la riducibilità in γ dell' equazione che determina le coniche degeneri, equazione che viene ad avere almeno una radice in γ.

Se $A_2'(x, y)$ e $B_2'(x, y)$ hanno in γ una sola radice in comune (α, β), cioè se sulla r si ha un punto singolare della F, per questo passano tutte le C mentre per ogni altro punto di r passa una ed una sola C.

Osserviamo ora che se sulla r non si trovano punti singolari della F in γ e se nessuna delle C è degenere, il numero N_1 dei punti della F è $q^2 + 2q + 1$. Inoltre per ogni C degenere il numero dei punti della F aumenta o diminuisce di q rispetto a N_1 secondochè la C degenere si spezzi in due rette distinte in γ oppure fuori di γ. D' altra parte, per ogni radice comune ad $A_2'(x, y)$ e $B_2'(x, y)$ appartenente a γ, cioè per ogni punto comune a tutte le C, la F ha sulla retta r un punto singolare. Quindi per ogni punto singolare della F situato sulla retta r, il numero dei punti della F diminuisce di q. Possiamo dunque concludere col seguente

TEOREMA 1. – *Se* F *non è rigata e possiede in γ la retta* r, *se indichiamo con* C *le coniche segate sulla* F *dai piani per la retta* r, *detti* t *il numero delle* C *degeneri che si spezzano in γ in due rette distinte*, s *il numero delle* C *degeneri che si spezzano fuori di γ*, g *il numero dei punti singolari della* F *sulla retta* r *e in γ, per il numero* N *dei punti della* F *si ha*

$$N = q^2 + 1 + (t - s - g + 2)q \tag{2}$$

e risulta

$$t + s \leq 5, \qquad g \leq 2.$$

Il numero N non supera dunque $q^2 + 7q + 1$, nè è inferiore a $q^2 - 5q + 1$. Se quindi indichiamo con G una superficie cubica di $S_{3,q}$ irriducibile e non rigata a coefficienti in γ, se G non ha punti singolari in nessuna estensione di γ, nelle estensioni di γ di ordine Q abbastanza elevato essa possiede esattamente $Q^2 + 7Q + 1$ punti. Siccome il numero delle rette della G non è superiore a 27 (³), e ricordando che il numero delle coniche degeneri C appartenenti alla G e contenute in un fascio di piani avente per asse una retta di G non è superiore a 5, si vede che l' ordine Q della minima estensione di γ necessaria perchè la G abbia $Q^2 + 7Q + 1$ punti non

(³) Cfr. loco citato in (²).

supera $q^{13\cdot6\cdot2^5}$ e per la F, che possiede una retta in γ, $q^{6\cdot2^5}$. Infatti se l'equazione di grado 27 che determina le rette della G non ha nessuna radice in γ, se è irriducibile, basta un'estensione di γ di grado 27 perchè la G abbia 27 rette. Se invece tale equazione è riducibile in γ sarà sufficiente un'estensione, γ' di γ, di grado non superiore a 13 perchè essa abbia in γ' almeno una radice. Analogamente per l'equazione di grado non superiore a 5 che determina le C degeneri si vede che basta un'estensione, γ'' di γ', di grado non superiore a 6 perchè essa abbia un numero di radici pari al suo grado. Analogamente una C degenere in una estensione di γ'' di secondo grado si spezza certamente in due rette distinte.

3. Poniamo ora per x in γ $\Phi(x)=0$ se $x=0$; $\Phi(x)=1$ se x in γ è un quadrato; $\Phi(x)=-1$ se x non è un quadrato. Facciamo vedere che:

TEOREMA 2. - *Se ogni conica* C *è tangente ad* r, *all'equazione della* F *si può dare la forma*

$$z(x^2+2Ayz)+2Byzt+2Cxt^2+2Dyt^2+2Ezt^2+Ft^3=0. \tag{3}$$

essendo A, B, C, D, E, F *in* γ *e* $A\neq0$; *inoltre il numero dei punti della* F *è*

$$q^2+2q+1, \qquad se\ \Phi(B^2-4AD)=-1$$

$$q^2+\alpha q+1+\frac{1}{2}\{\Phi(B^2-4AD)+1\}\{\Phi[C^2-k_1(2Ek_1+F)]+ \tag{4}$$

$$+\Phi[C^2-k_2(2Ek_2+F)]\}q, \qquad se\ \Phi(B^2-4AD)\geq0$$

dove è $\alpha=2$ *se* $D\neq0$; $\alpha=1$ *se* $D=0$, $C\neq0$; $\alpha=0$ *se* $C=D=0$; *e* k_1 *e* k_2 *sono le radici (eventualmente concidenti) appartenenti a* γ *dell'equazione a coefficienti in* γ

$$Ak^2+Bk+D=0. \tag{5}$$

Scelto il sistema di riferimento in modo che la C_∞ abbia le equazioni $x^2+2Ayz=0$, $t=0$, con $A\neq0$, l'equazione della F sarà allora, essendo tutti i coefficienti in γ:

$$z(x^2+2Ayz)+a_{11}x^2t+a_{22}y^2t+a_{33}z^2t+2a_{12}xyt+2a_{13}xzt+$$

$$+2a_{23}yzt+2a_{14}xt^2+2a_{24}yt^2+2a_{34}zt^2+a_{44}t^3=0.$$

Si vede subito che è $a_{12}=a_{22}=0$. La sostituzione $x=X-a_{13}t$, $y=Y-a_{33}t/2A$, $z=Z-a_{11}t$ dà allora all'equazione della F la forma (3). Il piano $z=kt$ taglia la F di equazione (3) secondo la retta r di equazioni $z=t=0$ e secondo una conica C che risulta degenere se $k=0$ o se k verifica la (5). Quindi il piano $z=0$ contiene una C degenere nella retta r ed in un' altra retta, distinta da r se non è $C=D=0$. Inoltre la F ha sulla r un punto singolare.

Allora se $\Phi(B^2-4AD)=-1$ per la (2) la F ha q^2+2q+1 punti.

Se $\Phi(B^2-4AD)=0$ la (5) ammette le due radici coincidenti $k_1=k_2=-B/2A$; se $\Phi(B^2-4AD)=1$ la (5) ammette due radici distinte k_1 e k_2. La C corrispondente alla radice k_i si spezza in due rette di γ distinte o coincidenti oppure in due rette esterne a γ secondo che sia $\Phi[C^2-k_i(2Ek_i+F)]\gtreqless 0$.

Quindi se $B^2-4AD=0$, per $B\neq 0$ e quindi $D\neq 0$ la F ha: $q^2+1+\{\Phi[4A^2C^2-2B^2E+2ABF]+2\}q$ punti. Per $B=D=0$, $C\neq 0$ la F ha q^2+1+2q punti. Per $B=C=D=0$ la F ha q^2+1+q punti.

Se poi $\Phi(B^2-4AD)=1$ il numero dei punti della F è

$$q^2+1+\{\Phi[C^2-k_1(2Ek_1+F)]+\Phi[C^2-k_2(2Ek_2+F)]+\alpha\}q.$$

Le (4) riassumono i diversi casi.

Senza darne la dimostrazione che è del tutto ovvia possiamo enunciare il seguente

TEOREMA 3. – *Se qualche conica* C *non è tangente ad* r, *il numero dei punti della* F *è* $q^2+1+(2-g)q$, *se nessuna delle* C *è degenere. Se qualcuna delle* C *è degenere, l'equazione a coefficienti in* γ *della* F *può essere scritta*

$$z(x^2-ay^2)+a_{22}y^2t+a_{33}z^2t+2a_{12}xyt+$$
$$+2a_{14}xt^2+2a_{24}yt^2+2a_{34}zt^2+a_{44}t^3=0$$

o anche, se qualcuna delle C *è degenere e si spezza in* γ

$$2xyz+a_{11}x^2t+a_{22}y^2t+a_{33}z^2t+2a_{14}xt^2+ \tag{6}$$
$$+2a_{24}yt^2+2a_{34}zt^2+4a_{44}t^3=0.$$

La determinazione del numero delle soluzioni di queste equazioni in funzione dei loro coefficienti riesce in generale molto laboriosa. L. CARLITZ ([1]) ha determinato il numero delle soluzioni (proprie) della (6) per $a_{14}=a_{24}=a_{34}=0$. Come applicazione del metodo usato più in generale troviamo il numero delle soluzioni della (6) per

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0, \qquad a_{14}a_{24}a_{34}\neq 0. \tag{7}$$

Facciamo vedere che

TEOREMA 4. - *Nelle ipotesi* (7) *il numero delle soluzioni della* (6) *è*

$$q^2+3q+1+q\Phi(a_{44}+a_{14}a_{24}a_{34}). \tag{8}$$

Nelle ipotesi (7) il piano $z=kt$ taglia la superficie di equazione (6) secondo una conica degenere se

$$k(a_{34}k^2+2a_{44}k-a_{14}a_{24})=0$$

cioè, per $a^2_{44}+a_{14}a_{24}a_{34}=\Delta^2$, se $k=0$ oppure $k=(-a_{44}\pm\Delta)/a_{34}$.
Si hanno cioè tre coniche degeneri distinte se $\Delta\neq 0$; due soltanto se $\Delta=0$. Se poi $a^2_{44}+a_{14}a_{24}a_{34}$ non è in γ un quadrato si ha per $k=0$ l'unica conica degenere.

Per $k=0$ la conica degenere si spezza nella retta $z=t=0$ e nella retta $a_{14}x+a_{24}y+2a_{44}t=0$, $z=0$; le altre coniche degeneri, se esistono, si spezzano ciascuna in γ in due rette distinte. Osserviamo anche che la conica C_∞ del piano $t=0$ è degenere in due rette distinte e che sulla retta $z=t=0$ si trovano due punti singolari. In questo caso nella (2) è $s=0$, $g=2$ e rispettivamente $t=4$, 3, 2 secondo che sia $\Phi(a^2_{44}+a_{14}a_{24}a_{34})\gtreqless 0$. Ne risulta quindi la (8).

4. Dimostriamo ora che

TEOREMA 5. - *Se la* F *possiede in* γ *il punto doppio* P *e* K *è il cono quadrico tangente alla* F *in* P, *il numero* N *dei punti della* F *è*

$$N=q^2+(d-\beta)q+1 \tag{9}$$

dove $\beta=1$ *se* K *si spezza in* γ *in due piani distinti,* $\beta=-1$ *se* K *si spezza in una estensione di* γ, $\beta=0$ *negli altri casi e* $0\leq \mathrm{d}\leq 6$ *è il numero delle rette della* F *concorrenti in* P.

[1]) Cfr. L. CARLITZ, *Certain special equations in a finite field*, « Monat. f. Math. », 58, (1954).

Infatti tenuto conto dell' ordine della F e di K si vede subito che $0 \leq d \leq 6$; inoltre le rette uscenti da P e non situate su K incontrano ulteriormente la F in un punto distinto da P, le generatrici di K esterne ad F non la incontrano ulteriormente.

Quindi, se $\beta = 0$, q^2 delle $q^2 + q + 1$ rette passanti per P incontrano la F in un punto distinto da P; se invece $\beta = 1$, $q^2 - q$ rette passanti per P incontrano ulteriormente la F; se poi $\beta = -1$ le rette passanti per P che incontrano ancora la F sono $q^2 + q$. Tenuto conto che d rette per P giacciono sulla F, si ricava la (9).

5. Consideriamo il caso che la F sia rigata cioè che tutte le sue sezioni piane siano dotate di un punto doppio. Il luogo dei punti doppi è una retta r, direttrice doppia della rigata appartenente a γ. Se ogni piano per r incontra ulteriormente la F secondo una retta distinta da r diremo che F è una rigata cubica generale. Se invece un piano per r non incontra ulteriormente la F diremo che la F è una rigata cubica di CAYLEY. Se poi due piani per r non incontrano ulteriormente la F è evidente che si tratta di un cono cubico con retta doppia nodale. Si vede allora facilmente che

TEOREMA 6. - *Se* N *è il numero dei punti di una rigata cubica* F *è:* $\mathrm{N} = \mathrm{q}^2 + 2\mathrm{q} + 1$, *per la rigata cubica generale*; $\mathrm{N} = \mathrm{q}^2 + \mathrm{q} + 1$, *per la rigata cubica di Cayley*; $\mathrm{N} = \mathrm{q}^2 + 1$, *per il cono cubico con retta doppia nodale.*

Infatti per la rigata cubica generale la retta distinta da r segata sulla F da un piano passante per r ha q punti fuori di r. I punti di F esterni a r sono dunque $q(q+1)$ e quindi $N = q^2 + 2q + 1$. Analogamente si trattano gli altri due casi.

6. Dimostriamo infine il

TEOREMA 7. - *Se* F *non contiene nessuna retta in* γ, *ma due rette sghembe* r_1, r_2, *esistenti su* F *in una estensione di* γ, *sono determinate da una equazione di secondo grado a coefficienti in* γ, *il numero dei punti della* F *è* $q^2 + q + 1$.

Infatti la proiezione sghemba dei punti della superficie nei punti di un piano generico α per mezzo delle rette che si appoggiano ad r_1 ed r_2, mette in corrispondenza biunivoca senza eccezioni i punti di α con quelli di F.