BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PAOLO SANTORO

# Un criterio di limitatezza in futuro delle soluzioni di una equazione differenziale non lineare.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **11** (1956), n.3, p. 432–432.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_432_0>

# Un criterio di limitatezza in futuro delle soluzioni di una equazione differenziale non lineare.

Nota di PAOLO SANTORO (a Firenze)

**Sunto.** - *Estendendo un criterio di* H. A. ANTOSIEWICZ, *si dimostra un teorema di limitatezza in futuro delle soluzioni di un'equazione differenziale non lineare.*

*Sia data l' equazione*

$$\ddot{x} + \omega(x, \dot{x})\dot{x} + h(x) = p(t) \tag{1}$$

*con* $\omega(x, \dot{x})$ *e* $h(x)$ *funzioni continue e lipschitziane in qualunque intervallo finito e* $p(t)$ *funzione continua di* $t$ *in* $(t_0, +\infty)$.

*Se*

$$\omega(x, \dot{x}) = \varphi(x, \dot{x}) + \psi(x, \dot{x})$$

i) *con*

$$\varphi(x, \dot{x}) > 0$$

ii) *è possibile trovare una funzione* $f(x)$ *tale che posto*

$$a(x) = exp\left(\int_0^x f(u)du\right)$$

*risulti* $0 < a(x) < A$ ($A$ *costante*) *e*

$$\psi(x, \dot{x}) \geq f(x)a^{-1}(x)\dot{x}$$

iii) *posto* $H(x) = \int_0^x a^2(u)h(u)du$ *sia* $H(x) > 0$ *per* $x \neq 0$ *e* $\lim_{|x| \to +\infty} H(x) = +\infty$

iv) *se* $\int^{\infty} |p(t)| dt < \infty$; *allora ogni soluzione dell' equazione* (1) *è limitata in futuro, insieme alla sua derivata* (1).

Il teorema si prova seguendo il ragionamento di H. A. ANTOSIEWICZ, richiamato in Nota. La (1) equivale al sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y/a(x) \\ \dot{y} = -\varphi(x, y)y - \psi(x, y)y - h(x)a(x) + p(t)a(x) + f(x)y^2a^{-2}(x) \end{cases} \tag{2}$$

e si verifica subito che se consideriamo la funzione

$$U(x, y) = (2H(x) + y^2)^{1/2}$$

essa rimane limitata su qualunque soluzione $x = x(t)$, $y = y(t)$ del sistema (2). Derivando, infatti, la funzione $U[x(t), y(t)]$ rispetto a $t$, abbiamo

$$U\dot{U} = -\varphi(x, y)y^2 - [\psi(x, y) - f(x)ya^{-2}(x)]y^2 + p(t)a(x)y < A|y|\,|p(t)|$$

per la ii), da cui $\dot{u} < A|p(t)|$ e quindi per la iv) risulta il teorema.

(1) Questo teorema estende un teorema di H. A. ANTOSIEWICZ. Confr. *On non-linear differential equations of the second order with integrable forcing term,* Jour. London Math. Soc., XXX (1955), p. 64-67.