Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giliana Massaro

Il termine complementare di una nuova formula per la valutazione asintotica dei polinomi di Legendre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **11** (1956), n.3, p. 433–439.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1956_3_11_3_433_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1956.

Il termine complementare di una nuova formula per la valutazione asintotica dei polinomi di Legendre.

Nota di GILIANA MASSARO (a Bari)

Sunto. - *Come le prime righe di Nota.*

In una nota [1], pubblicata in questo stesso Bollettino, L. GATTESCHI ha stabilito per il polinomio $P_n(\cos \vartheta)$ di LEGENDRE la seguente formula:

$$(1)\quad \left(\frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos \vartheta) = J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta \right\} - \frac{\vartheta}{24\left(n + \frac{1}{2}\right)} J_1 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta \right\} + \varepsilon(\vartheta),$$

essendo $J_0(x)$ e $J_1(x)$ funzioni di BESSEL di prima specie ed ha valutato l'ordine di grandezza del termine complementare $\varepsilon(\vartheta)$.

Noi vogliamo qui maggiorare esplicitamente $\varepsilon(\vartheta)$ che, come risulta dal lavoro di L. GATTESCHI, ha l'espressione

$$(2)\quad \varepsilon(\vartheta) = \pi/8 \int_0^{\vartheta} \Delta(t, \vartheta) k(t) t^3 J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)t \right\} dt +$$

$$+ \pi/8 \int_0^{\vartheta} \Delta(t, \vartheta) t^{-1} \left\{ \left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 \right\} \sigma(t) dt,$$

dove

$$(3)\quad \Delta(t, \vartheta) = J_0\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta\right\} Y_0\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right\} - J_0\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right\} Y_0\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta\right\},$$

$$(4)\quad k(t) = \left[\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 - \frac{t^3}{3}\right] \frac{1}{t^4},$$

e per $\sigma(\vartheta)$ valgono le disuguaglianze

$$(5)\quad \begin{cases} |\sigma(\vartheta)| < 0,09\,\vartheta^2, & \text{per } 0 < \vartheta \leq \pi/2n, \\ |\sigma(\vartheta)| < 0,622\,\vartheta^{\frac{1}{2}}\, n^{-\frac{3}{2}}, & \text{per } \pi/2n < \vartheta \leq \pi/2. \end{cases}$$

[1] L. GATTESCHI, *Una nuova rappresentazione asintotica dei polinomi di Legendre mediante funzioni di Bessel*, « Boll. Unione Mat. Ital. », (3), **11**, (1956), pp. 203-209.

Per ottenere migliori limitazioni possiamo supporre $n > 3$, le disuguaglianze che stabiliremo valgono però anche per $n = 1, 2, 3$.

Al fine di maggiorare $k(t)$ osserviamo che

$$\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 = \frac{2t^2}{1 - \cos 2t} - 1 = \frac{2t^2}{\dfrac{(2t)^2}{2} - \dfrac{(2t)^4}{4!} + \eta\dfrac{(2t)^6}{6!}} - 1, \quad 0 < \eta < 1,$$

da cui

$$\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 = \frac{t^2}{3} - \eta\frac{2t^4}{45} + \frac{\left(\dfrac{t^2}{3} - \eta\dfrac{2t^4}{45}\right)^2}{1 - \dfrac{t^2}{3} + \eta\dfrac{2t^4}{45}},$$

cioè per la (4)

$$|\, k(t)\,| < \frac{2}{45} + \frac{\left(\dfrac{1}{3} + \eta\dfrac{2t^2}{45}\right)^2}{1 - \dfrac{t^2}{3}},$$

ed avendosi, per $0 < t \leq \vartheta \leq \pi/2$ e $n > 3$,

$$\frac{2t^2}{45} < \frac{1}{3},$$

risulta

$$|\, k(t)\,| < \frac{2}{45} + \frac{1}{9 - 3t^2}.$$

In particolare si ha

$$(6) \qquad |\, k(\pi/2n)\,| < 0{,}17, \qquad |\, k(\pi/2)\,| < 0{,}68.$$

a) *Il caso* $0 < \vartheta \leq \pi/2$.

Della nota relazione

$$(7) \quad Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left\{\log\frac{x}{2} + \gamma\right\} J_0(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2r}}{(r\,!)^2}\left\{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}\right\},$$

dove γ é la costante di EULERO-MASCHERONI, si consideri la serie a secondo membro; é facile verificare che per

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi/2n < 9\pi/16,$$

la somma di questa serie non supera il valore assoluto $(9\pi/32)^2$. Tenuto inoltre presente che

$$(8) \qquad |\, J_0(x)\,| < 1,$$

si ha dalla (3)

$$(9) \quad \left|\Delta(t, \vartheta)\right| \leq \frac{2}{\pi}\left| J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\} J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\right\}\log\frac{t}{\vartheta}\right| + 2\cdot\frac{2}{\pi}\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\left[\left|\log\frac{t}{\vartheta}\right| + 2\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2\right].$$

Dalla (2) per $0 < \vartheta < \pi/2n$ abbiamo

$$(10) \qquad |\varepsilon(\vartheta)| \leq |k(\pi/2n)|\,\pi/8\left|\int_0^\vartheta \Delta(t, \vartheta)t^3 J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}dt\right| +$$

$$+\frac{\pi}{8}\left|\int_0^\vartheta \Delta(t, \vartheta)t^{-1}\left\{\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1\right\}\sigma(t)dt\right|,$$

e quindi per la (8) e la (9)

$$\left|\int_0^\vartheta \Delta(t, \vartheta)t^3 J_0\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right\}dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^\vartheta \left|\log\frac{t}{\vartheta}\right| t^3 dt + 2\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2\frac{\vartheta^4}{4}\right\} = \frac{\vartheta^4}{\pi}\left\{\frac{1}{8} + \left(\frac{9\pi}{32}\right)^2\right\}.$$

Per l'ultimo integrale a secondo membro della (10) si ha

$$\left|\int_0^\vartheta \Delta(t, \vartheta)t^{-1}\left\{\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1\right\}\sigma(t)dt\right| \leq$$

$$\leq |\sigma(\vartheta)|\left|\int_0^\vartheta \Delta(t, \vartheta)t^{-1}\left\{\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1\right\}dt\right|.$$

Ma per t in $(0, \pi/2n)$ è

$$\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 = \frac{2t^2}{1-\cos 2t} - 1 < \frac{2t^2}{\frac{(2t)^2}{2} - \frac{(2t)^4}{4!}} - 1 =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{t^2}{3}} - 1 < \frac{t^2}{3-t^2} < 0,352t^2,$$

e quindi per la (9)

$$\left|\int_0^{\vartheta} \Delta(t, \vartheta)t^{-1}\left\{\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1\right\}\sigma(t)dt\right| <$$

$$< |\sigma(\vartheta)| \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta}\left[\left|\log\frac{t}{\vartheta}\right| + 2\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2\right]0{,}352t^2dt =$$

$$= \sigma(\vartheta) | \frac{0{,}352}{\pi}\left[\frac{1}{2} + 2\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2\right]\vartheta^3 .$$

Si ha così

$$|\varepsilon(\vartheta)| < C\vartheta^4,$$

con

$$C = \frac{1}{8}\left\{\left|k\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right|\left[\frac{1}{8} + \left(\frac{9\pi}{32}\right)^2\right] + 0{,}352\left[\frac{1}{2} + 2\left(\frac{9\pi}{32}\right)^2\right]0{,}09\right\} \leq 0{,}03\vartheta^4 .$$

cioè

$$(11) \qquad \boxed{|\varepsilon(\vartheta)| < 0{,}03\vartheta^4, \qquad 0 < \vartheta \leq \vartheta/2n} .$$

b) *Il caso* $\pi\,2n < \vartheta \leq \pi/2$.

Poniamo

$$(12) \qquad A = \left|\int_0^{\vartheta}\Delta(t, \vartheta)t^3 J_0\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right\}k(t)dt\right| \leq \left|k\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| A_1 + \left|k\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right| A_2 ,$$

con

$$A_1 = \left|\int_0^{\pi/2n}\Delta(t, \vartheta)t^3 J_0\left\{\left(n + \frac{2}{2}\right)t\right\}dt\right| ,$$

$$A_2 = \left|\int_{\pi/2n}^{\vartheta}\Delta(t, \vartheta)t^3 J_0\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right\}dt\right| .$$

Ricordiamo che è [2]

$$(13) \qquad \left\{\begin{aligned} J_0(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + R(x)\right] ,\\ Y_0(x) &= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + R(x)\right] ,\end{aligned}\right.$$

[2] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel functions*, Cambridge (1922), § 7 · 31, pp. 207-208.

dove

$$| R(x) | \leq \frac{1}{8\,|\,x\,|} + \frac{9}{2(8x)^2} \; ,$$

si ha

$$A_1 < \left(\frac{2}{\pi n \vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{8n\vartheta} + \frac{9}{2(8n\vartheta)^2}\right] \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\pi/2n} t^3 \left[\left| Y_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\} \right| + \left| J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\} \right| \right] \cdot \left| J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) t \right\} \right| dt \, ,$$

e poichè, per $\pi/2n < \vartheta \leq \pi/2$,

$$1 + \frac{1}{8n\vartheta} + \frac{9}{2(8n\vartheta)^2} < 1{,}11 \, ,$$

otteniamo, dalla (7), dalla (8) e per quanto visto in a),

$$A_1 < \left(\frac{2}{\pi n \vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} 1{,}11 \int_0^{\pi/2n} \left\{ \frac{2}{\pi} \left[\left| \log \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{t}{2} + \gamma + \left(\frac{9\pi}{32}\right)^2 \right| \right] + 1 \right\} t^3 dt \, ,$$

da cui

$$A_1 \leq k_1 \vartheta^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{9}{2}} \leq k_1 \vartheta^{\frac{5}{2}} \left(\frac{2n}{\pi}\right)^3 n^{-\frac{9}{2}} = k_1 \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \vartheta^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{3}{2}} \; ,$$

con

$$k_1 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} 1{,}11 \, \frac{\pi^4}{4(2)^4} \left\{ \frac{2}{\pi} \left| \frac{1}{4} \left(1 - 4 \log \frac{\pi}{4}\right) + \gamma + \left(\frac{9\pi}{32}\right)^2 \right] + 1 \right\} < 2{,}93 \, ,$$

cioè

$$A_1 \leq 0{,}762 \, \vartheta^{\frac{5}{2}} \, n^{-\frac{3}{2}} \, . \tag{14}$$

Per A_2 si ha invece, sempre per le (13),

$$A_2 \leq 1{,}11 \left(\frac{2}{\pi n \vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} 2 \int_{\pi/2n}^{\vartheta} \frac{2}{\pi n t} t^3 \left[1 + \frac{1}{8nt} + \frac{9}{2(8nt)^2}\right]^2 dt \leq$$

$$\leq (1{,}11)^3 \left(\frac{2}{\pi n \vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3\pi n} \left[\vartheta^3 - \left(\frac{\pi}{2n}\right)^3\right] < 0{,}47 \, n^{-\frac{3}{2}} \vartheta^{\frac{5}{2}} \; ,$$

cioè

$$A_2 < 0{,}47 \, n^{-\frac{3}{2}} \upsilon^{\frac{5}{2}} \, . \tag{15}$$

Poniamo ora

$$B = \left| \int_0^{\vartheta} \sigma(t)\Delta(t, \vartheta)t^{-1} \left\{ \left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 \right\} dt \right| \leq B_1 + B_2, \tag{16}$$

con

$$B_1 = \left| \int_0^{\pi/2n} \sigma(t)\Delta(t, \vartheta)t^{-1} \left\{ \left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 \right\} dt \right|,$$

$$B_2 = \left| \int_{\pi/2n}^{\vartheta} \sigma(t)\Delta(t, \vartheta)t^{-1} \left\{ \left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 \right\} dt \right|.$$

Per le (13) ed essendo, per $0 < t \leq \pi/2n$,

$$\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 < 0{,}352\, t^2,$$

si ha

$$B_1 \leq 0{,}09 \left(\frac{2}{\pi n \vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} 0{,}352 \cdot 1{,}11 \int_0^{\pi/2n} \left[\left| Y_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)t \right\} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)t \right\} \right| \right] t^3 dt,$$

e per le (7) e (8)

$$B_1 \leq 0{,}0356 \left(\frac{2}{\pi n \vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi/2n} \left\{ \frac{2}{\pi} \left[\left| \log \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{t}{2} \right| + \gamma + \left(\frac{9\pi}{32}\right)^2 \right] + 1 \right\} t^3 dt,$$

da cui, con calcolo analogo a quello fatto in a) per A_1,

$$B_1 \leq 0{,}094\, \vartheta^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{9}{2}} \leq 0{,}094 \left(\frac{2n}{\pi}\right)^3 \vartheta^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{9}{2}},$$

cioè

$$B_1 < 0{,}025\, \vartheta^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{3}{2}}. \tag{17}$$

Per B_2, sempre applicando le (3) ed essendo ora, per $\pi/2n < t \leq \pi/2n$,

$$\left(\frac{t}{\operatorname{sen} t}\right)^2 - 1 < 0{,}49\, t^2,$$

si ha

$$B_2 \leq (2/\pi n \vartheta)^{\frac{1}{2}} 1{,}11 \cdot \int_{\pi/2n}^{\vartheta} 2 \left(\frac{2}{\pi n t}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{8nt} + \frac{9}{2(8nt)^2} \right\} |\, \sigma(t) \,|\; 0{,}49 t dt,$$

e per la seconda delle (5)

$$B_2 \leq \left(\frac{2}{\pi n \vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} (1{,}11)^2 (0.622)(0{,}49) \left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{3}{2}} \left[\vartheta^2 - \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2\right] ,$$

da cui

$$B_2 < 0{,}25\, n^{-\frac{5}{2}} \vartheta^{\frac{3}{2}} \leq 0{,}25\, n^{-\frac{5}{2}} \vartheta^{\frac{5}{2}} \frac{2n}{\pi} ,$$

cioè

(18) $$B_2 < 0{,}16\, n^{-\frac{3}{2}} \vartheta^{\frac{5}{2}} .$$

Per le posizioni fatte si ha allora dalla (2) per la (12) e la (16), quando $\pi/2n < \vartheta \leq \pi/2n$,

$$|\,\varepsilon(\vartheta)\,| < \frac{\pi}{8} \left| k\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right| A_1 + \frac{\pi}{8} \left| k\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| A_2 + \frac{\pi}{8} (B_1 + B_2) ,$$

e per le (6), (14), (15), (17), (18)

$$|\,\varepsilon(\vartheta)\,| < \frac{\pi}{8} (0{,}17 \cdot 0{,}762 + 0{,}68 \cdot 0{,}47 + 0{,}025 + 0{,}16) \vartheta^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{3}{2}} ,$$

cioè

(19) $$\boxed{\varepsilon(\vartheta) < 0{,}25\, \vartheta^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{3}{2}} , \quad \pi/2n < \vartheta \leq \pi/2} .$$

Dalla (1) si ha pertanto, per la (11) e per la (19)

(20) $$\boxed{\begin{gathered} \left(\frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\vartheta}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos \vartheta) = \\ = J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} - \frac{\vartheta}{24 \left(n + \frac{1}{2}\right)} J_1 \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta \right\} + \varepsilon(\vartheta) , \\ |\,\varepsilon(\vartheta)\,| < 0{,}03\, \vartheta^4 , \qquad \text{per} \qquad 0 < \vartheta \leq \pi/2n , \\ |\,\varepsilon(\vartheta)\,| < 0{,}25\, \vartheta^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{3}{2}} , \quad \text{per} \quad \pi/2n < \vartheta \leq \pi/2 . \end{gathered}} .$$