UMI

Recensioni.

* Scritti Matematici in onore di Filippo Sibirani, Cesare Zuffi Editore, Bologna, 1956 (Vittorio Emanuele Galafassi)
* Alessandro Terracini, ed., In memoria di Giuseppe Peano, Liceo Scientifico Statale di Cuneo, 1955 (Giovanni Ricci)
* M. Picone e G. Fichera, Trattato di Analisi Matematica, Vol. II, Tumminelli Editore, Roma, 1956 (Carlo Miranda)
* Wilhelm Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955 (Giuseppina Masotti Biggiogero)
* A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Birkhäuser verlag, Basel und Stuttgart, 1956 (Maria Scafati)
* B. Russel, I principi della matematica, Longanesi, Milano, 1951 (Francesco Lerda)
* Horst von Sanden, Praxis der Differentialgleichungen, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1955 (Roberto Conti)
* W. D. Kupradse, Raundwertaufgabe, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956 (Renato Nardini)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.1, p. 101–116.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_1_101_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

RECENSIONI

Scritti matematici in onore di Filippo Sibirani, Bologna, (Dott. Cesare Zuffi, Editore), 1956, pp. XIX + 347.

Il volume, in ottima veste tipografica ed elegantemente rilegato, si apre con un bel ritratto firmato di Filippo Sibirani.

Segue una breve prefazione stesa dal Prof. Walter Bigiavi, attuale Preside della Facoltà bolognese di economia e commercio. Essa delinea del Sibirani l'attiva carriera, che da Pavia e Trieste lo riconduce a Bologna, dove si era formato e dove, ritornando, si rendeva benemerito di quegli studî come Insegnante e come Preside; e pur mette in vista la forte tempra di Lui, instancabile cultore ed assertore delle Matematiche, così pure come applicate, a cui venga luce da' rigore dei fondamenti, dalla virtuosità o sobrietà degli sviluppi, dal necessario e redditizio intervento nella pratica di ogni giorno.

Risulta ciò anche dall'elenco delle numerose pubblicazioni, di Filippo Sibirani (152 fra Note e Memorie e 10 volumi), e pure se ne trae la grande varietà degli interessi e dell'attuazione, attraverso i più diversi campi di indagine e di diffusione.

E tale varietà, unita a larga cerchia di consensi, risulta altresì dall'elenco degli scritti a Lui offerti nella circostanza del collocamento a riposo.

Si presentano essi nel volume secondo l'ordine alfabetico d'autore; ci sia però consentito di riferirne qui brevemente raggruppandoli per analogia di contenuto.

Appartengono all'Analisi, largamente intesa, ben otto dei trenta lavori, quelli di V. AMATO (Catania), *Funzioni di matrice*, di sistemazione dell'argomento largamente trattato e con riferimento a M. Cipolla; di G. BELARDINELLI (Milano), *Operatori differenziali ipergeometrici*, legato a ricerche di S. Pincherle, dell'Autore e di altri; di G. CIMMINO (Bologna), *Una estensione dei teoremi di convergenza e di unicità nella teoria del problema generalizzato di Dirichlet*, collegato a precedenti indagini dell'Autore ed inteso a sostituire nei teoremi indicati la convergenza in media, detta altresì « convergenza forte », con la « convergenza debole »; di A. MAMBRIANI (Parma), *Un saggio di risoluzione, con la pluriderivazione, di certe equazioni differenziali del secondo ordine, non lineari*, ove, col metodo formale introdotto dall'Autore, si risolve una estesa classe di equazioni alle derivate parziali; di G. OTTAVIANI (Trieste), *Sulla risoluzione di una equazione con il metodo di iterazione*, in cui, toccando un procedimento pur valido nella Matematica finanziaria, se ne precisano i limiti; di B. PINI (Cagliari), *Osservazioni sulla soluzione di un problema biarmonico generalizzato*, ove l'Autore riprende e continua una precedente sua trattazione; di G. RICCI (Milano), *Sul resto delle serie di potenze alla periferia del cerchio di convergenza*, nel quale è proseguita una ricerca dell'Autore con un adattamento opportuno del metodo col quale H. W. Young ha generalizzato il teorema di P. Fatou; infine di G. SANSONE e R. CONTI (Firenze), *Curve caratteri-*

stiche di sistemi omogenei, studio approfondito e qualitativo di tali curve relative alla classe dei sistemi

$$\dot{x} = X_m(x, y) \quad , \quad \dot{y} = Y_m(x, y)$$

con $X_m(x, y)$, $Y_m(x, y)$ funzioni (reali) definite in tutto il piano euclideo x, y, simultaneamente nulle solo per $x = 0$, $y = 0$ ed omogenee di egual grado $m \geq 1$, intero.

Una ricerca analitica, utile nel calcolo numerico, è quella di U. CASSINA (Milano), *Sulla formula sommatoria di Euler col resto di Malmsten,* ove della formula sono date particolari dimostrazioni, e sono stabiliti legami coi polinomi di Bernoulli.

Appartiene invece alla Geometria algebrica il contributo di E. TOGLIATTI (Genova), *Un'osservazione sulle reti omaloidiche di curve piane,* ove, con grande semplicità di mezzi, si dimostrano alcune diseguaglianze fra le molteplicità nei punti base da aggiungersi a quelle di M. Nother, J. Rosanes e D. Montesano; alla geometria integrale quello della Signora G. MASOTTI BIGGIOGERO (Milano), *Sulla geometria integrale: nuove formule relative agli ovaloidi,* in cui è caratteristico il partito tratto dal vincolo intercedente fra densità riguardanti rette secanti l'ovaloide o a questo esterne; alla geometria proiettiva differenziale quello di M. VILLA (Bologna), *Ancora sui riferimenti intrinseci per le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo,* ove, continuando un indirizzo già altrove seguito, vengono in particolare ed in modo nuovo determinati riferimenti intrinseci relativi al caso in esame.

Indole storico-critica spetta allo scritto di L. BRUSOTTI (Pavia), *A proposito di una caratterizzazione della retta negli spazi euclidei;* vi si considerano l'atteggiamento del geometra Hans Mohrmann, la posizione del filosofo Hans Cornelius, il precedente di Leibniz ed una interpretazione gruppale, con larga informazione bibliografica antica e recente.

La Matematica è poi concepita quale strumento per lo studio della Meccanica e, più in generale, della Fisica in D. GRAFFI (Bologna), *Alcuni teoremi sull'elettrostatica dei dielettrici non lineari,* che contempla l'ipotesi $D = D(E)$, ove i vettori D ed E indicano lo spostamento e il campo elettrico, e D è funzione continua e differenziabile (generalmente non lineare) di E; in A. MASOTTI (Milano), *Sopra una estensione di un teorema di Newton relativo ai moti centrali parabolici,* che studia moti parabolici che sono centrali rispetto ad un punto qualsiasi; in A. PIGNEDOLI (Bologna), *Sulle vibrazioni di una piastra ellittica incastrata all'orlo,* che, con largo ma efficiente sviluppo algoritmico, risolve il problema utilizzando le « trascendenti epicicloidali » dell'Agostinelli, evitando l'uso delle funzioni di Mathieu, sconsigliabile per ragioni di convergenza.

Se, com'è conforme all'attività del Sibirani, più di un lavoro si riferisce, come già si è visto, alle Matematiche come studio a sè o come fondamento di una teoria fisica, è ben naturale che in questa raccolta siano largamente rappresentate quelle teorie che fortemente attrassero l'attenzione del Sibirani, quelle teorie cioè che, movendo dal calcolo delle probabilità e dalla statistica, sfocino nelle più svariate applicazioni finanziarie ed attuariali. In questo ordine d'idee si ambientano direttamente quattordici degli scritti offerti.

Una loro classificazione non riesce sempre ovvia perchè spesso mezzi e risultati intimamente si intrecciano. Sono peraltro criticamente posti concetti fondamentali da trattazioni come quella di C. E. BONFERRONI (Firenze), *La mediana ponderata di una distribuzione continua,* che, con più recenti personali apporti, ricorda vedute analoghe pertinenti al Somigliana, al Volterra, al Sibirani stesso; di F. P. CANTELLI (Roma), *Su qualche applicazione della legge uniforme dei grandi numeri per la deduzione delle leggi di frequenza da considerazioni di probabilità,* che acutamente ed opportunamente su quesiti semplici convalida metodi ed atteggiamenti critici altrove occorsi; di O. CHISINI (Milano), *Alcuni teoremi sulle medie,* richiamante una definizione personale semplicissima e generalissima di media di cui ulteriormente si precisa e si commenta l'uso; di B. DE FINETTI (Roma), *Sul numero di elementi al di là dell'ultimo osservato,* ove il problema è nettamente posto, circoscritto, e, su opportune ipotesi, dà luogo altresì a calcolazioni; di E. LEVI (Catania), *Sul significato concreto delle leggi di interesse,* ov'è fatto un chiaro e sistematico esame della questione; di G. POMPILJ (Roma), *La mutabilità dell'universo dei campioni,* notevole esempio di quelle impostazioni che interpretano il campione come variabile causale e disciplinano una materia per sè degna di studio.

Problemi singoli sono l'oggetto di V. CASTELLANO (Roma), *Sulla divisione in intervalli di una variabile già divisa in intervalli, nell'ipotesi che la distribuzione delle frequenze sia una poligonale,* ricco di citazioni, di risultati, di determinazioni numeriche, di tabelle; di P. FORTUNATI (Bologna), *Rapporto di concentrazione, valori medi e schemi teorici di distribuzione massimante e minimante della variabilità,* ove sono ricordati studi statistici personali, cui il Sibirani collaborò, e sono utilizzate ed efficacemente proseguite concezioni attinte da G. Pietra e C. Gini; di F. GIACCARDI (Torino), *Considerazioni su alcune disuguaglianze e applicazioni,* in cui a partire dalla

$$\left[\frac{\sum_{s=1}^{n} x_s^{\alpha} p_s}{\sum_{s=1}^{n} p_s}\right]^{\frac{1}{\alpha}} < \left[\frac{\sum_{s=1}^{n} x_s^{\beta} p_s}{\sum_{s=1}^{n} p_s}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

($\alpha < \beta$; x_s positive non tutte eguali, $p_s > 0$), si contemplano e si conseguono utili disuguaglianze note e nuove con larghezza di citazioni e di risultati; di P. MAZZONI (Bari), *Sulla curva di Amoroso per la distribuzione dei redditi,* ove tale legge è studiata ed impiegata in congiunture concrete, con tabellazioni relative ai redditi dei cittadini americani e dei ferrovieri; di B. TEDESCHI (Roma), *Sulle limitazioni più convenienti della probabilità che una variabile causale a più dimensioni assuma un valore appartenente a un campo assegnato,* ove si estendono a più (ad es. due) variabili causali metodi già idonei nel caso di una sola variabile e si ottengono limitazioni utili anche in pratica; di G. USAI (Catania), *Considerazioni su valori attuali e premi in rendite,* in cui ben opportunamente si procede alla verifica di alcune espressioni relative a valori attuali e premi puri in rendite con procedimenti basati sull'ipotesi che le somme rappresentative siano convenientemente amministrate; di G. VAROLI (Bologna), *Sulla determinazione, col metodo di iterazione, del tasso di una rendita periodica a termini variabili in progressione geometrica,* largo riesame di teoremi e quesiti (anche personali) con applicazione a casi singoli, ricco di formule e di tabelle sulle quali non è qui possibile più minutamente riferire; di S. VIANELLI (Palermo), *Di alcuni metodi statistici di stima sequenziale,* che conduce fino ad esplicitazioni e calcoli alcuni processi suggeriti dalla « stima sequenziale » e dal « campionamento » negli studî statistici.

La prima constatazione che s'affaccia al lettore è come molteplici siano le vie per cui lo studioso italiano s'incammina e come, se la teoria per sè ha una forte attrattiva, non meno piena di risorse è la visione applicativa; dettami codesti però che furono sempre ben presenti a Filippo Sibirani.

Da così diverse parti unitaria e unanime è poi la corrente di affetto e di stima che accompagna l'offerta. La quale affonda le sue radici in una ancor più profonda ed estesa realtà: l'adesione non espressa di quanti, in numero molto maggiore, Gli furono vicini e, colleghi, studenti, amici, ammiratori, lo seguirono dappresso nella Sua meritoria e singolare attività.

Da ogni parte dunque al compianto Filippo Sibirani si dirigeva un significativo saluto che oggi, purtroppo, si muta in un memore omaggio.

VITTORIO EMANUELE GALAFASSI

In memoria di Giuseppe Peano, Studi di Beppo Levi, Guido Ascoli, Beniamino Segre, Francesco Barone, Ludovico Geymonat, Tommaso Boggio, Ugo Cassina, Ettore Carruccio, raccolti da Alessandro Terracini, Cuneo, presso il Liceo scientifico statale, 1955, pagine 116.

Cuneo, la città natale di Giuseppe Peano, volle onorare, nel 1953, la memoria del grande matematico intitolando al suo nome il Liceo scientifico. Il comitato esecutivo delle celebrazioni che si ebbero in quell'occasione, presieduto dal prof. Francesco Bertuzzi preside di quel liceo, ha voluto dedicare alla memoria del Peano anche la pubblicazione di questo volumetto nel quale è contenuta una serie di articoli, preceduti da una interessante prefazione di Alessandro Terracini che ne ha curata la raccolta. L'elenco degli articoli è il seguente: B. LEVI, *L'opera matematica di Giuseppe Peano*; G. ASCOLI, *I motivi fondamentali dell'opera di Giuseppe Peano;* B. SEGRE, *Peano e il Bourbakismo;* F BARONE, *Un'apertura filosofica della logica simbolica peaniana;* L. GEYMONAT, *I fondamenti dell'aritmetica secondo Peano e le obiezioni filosofiche di B. Russell*; T. BOGGIO, *Il Calcolo geometrico di Peano;* U. CASSINA, *Sul «Formulario mathematico» di Peano;* E. CARRUCCIO, *Spunti di storia delle matematiche e della logica nell'opera di G. Peano.*

Questo elenco sottolinea da sé il grande interesse del volume pubblicato: si tratta di una serie di saggi, scritti da collaboratori eminenti e di temperamento diverso, saggi tutti succosi che esaminano l'opera del Peano da punti di vista elevati e centrati su aspetti vari; i loro contenuti si interferiscono l'un l'altro e, nel loro insieme, delineano il profilo scientifico e umano del singolare matematico al quale sono dedicati; essi ci fanno apprezzare quanto sia vasta e ognor crescente l'influenza della sua opera anche se quest'opera, per certi suoi aspetti, ebbe caratteri di aristocratica concentrazione e conservò, nella fase più avanzata, un certo distacco verso gli sviluppi che potremmo dire «di frontiera» della matematica contemporanea.

Veniamo a parlare del contenuto dei vari articoli e a presentare qualcuno dei passi salienti: «L'attività matematica del Peano si concentra di «fatto sopra un periodo di 10 o 15 anni che chiudono il secolo scorso e «riassume, perfezionandola in molti punti, quella ricerca sopra i *Fonda-«menti della matematica* che caratterizza la seconda metà del diciannove-«simo secolo.» (pag. 9); «Il tratto caratteristico del genio del Peano fu «la spontanea ed immediata profondità nell'analisi delle idee, che a Lui «si presentavano ridotte spesso ad una schematica semplicità, ed in questa «forma soltanto erano da Lui apprezzate...» (pag. 11); «Il momento in cui il «Peano entrò nella vita scientifica è quello che si potrebbe chiamare il pe-«riodo eroico della teoria delle funzioni di variabile reale; ...» (pag. 13): questi sono passi dell'articolo di Beppo Levi, il «più antico discepolo» del Peano, che ripresenta qui, con alcune varianti, lo scritto pubblicato in questo Bollettino (*11*, pp. 253-262, 1932) nei mesi immediatamente seguenti la morte del Maestro. Il Levi illustra alcune parti dell'opera matematica del Peano e incomincia dall'aspetto geometrico ricordando il «Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann» (1888) e gli «Elementi di Calcolo geometrico» (1891) che diedero origine al Calcolo vettoriale, seguito con fervore dalla scuola italiana e oggi di uso universale. Sono ricordati poi: il «Calcolo differenziale e principi di calcolo integrale» di Angelo Genocchi, opera curata dal Peano (1884) e che da Lui ricevette un carattere schiettamente personale per le note critiche e le aggiunte, incisive e fresche e che sembrano scritte per un'opera didattica attuale; le ricerche del Peano sulle equazioni differenziali ordinarie e sui sistemi di tali equazioni, le più antiche delle quali (1886) conducono all'esistenza degli integrali nell'ipotesi della sola continuità: quando Oskar Perron ritrovò il risultato (1915) gliene fu attribuito il merito: la posizione del problema e la sua soluzione sembravano appartenere a una fase così matura degli studi in quel campo che non si poteva sospettare sul carattere di novità, mentre il Peano vi era giunto quasi trent'anni prima. B. Levi passa poi ad esaminare l'opera del Peano nel campo della logica simbolica e dei fondamenti (Calcolo geometrico, Arithmetices principia, Principi di Geometria, Studi di logica matematica) e i pregi dell'opera didattica « Lezioni di Analisi infinitesimale »; egli riesce a presentare la figura del Maestro come era il suo intento: « figura... viva « ed umana associazione di caratteri solo apparentemente fra loro in oppo- « sizione; intuizione matematica prevalentemente geometrica, nonostante il « contenuto analitico degli argomenti e nonostante il voluto formalismo « dell'espressione; intelligenza eclettica e tuttavia uniformizzatrice ed uni- « taria: semplicità e rigore. L'apostolo limitò l'opera del matematico e ne « impedì talvolta la completa estimazione: ma profonda resterà la sua in- « fluenza in molte concezioni sia scientifiche che didattiche » (pag. 21).

Segue l'articolo di Guido Ascoli che tratteggia mirabilmente il Peano, accentuando i motivi di prospettiva umana: « A volta a volta lo occupano « la matematica, la logica, la storia delle scienze, la linguistica, la didattica, « e sino minute questioni tecniche, e per diffondere le sue idee egli fonda « una rivista e un'accademia, sempre pronto a discutere e ad insegnare... « in Peano agiscono in ogni campo, ci sembra, motivi analoghi, ed elemen- « tari, sicchè tutta la sua attività appare illuminata da un'unica forma « mentale, guidata da pochi e semplici fili conduttori. » (pag. 23). Dopo avere ricordato l'opera del « giovane Analista » (le « aggiunte » al Calcolo di Genocchi, gli esempli « cruciali » ecc.) l'Ascoli scrive: « Siamo qui nel « solco in cui doveva nascere, pochi anni dopo, la celebre dimostrazione « dell'integrabilità dei sistemi differenziali e quella relativa all'integrazione « per serie dei sistemi differenziali lineari, ottenuta con l'ausilio del calcolo « delle sostituzioni, ove queste sono concepite, diremmo oggi, come elementi « di uno spazio astratto. Cio è da ricordare, in un'epoca in cui tale metodo « ci è tornato dall'America come un'ingegnosa trovata di modernissimi « matematici » (pag. 25); « In tal modo l'opera del Peano si inserisce in « quella corrente critica che, facendo capo ad Abel e a Cauchy, culmina « con Hilbert e Russell, ma con metodi e caratteri schiettamente personali » (pag. 26). Viene tratteggiato l'aspetto geometrico dell'opera che, tra l'altro, precorre di quarant'anni la « geometria infinitesimale diretta », l'ideografia logica e il programma del Formulario, la diffusione dell'interlingua, la didattica della « Rivista di matematica » e l'effetto benefico della critica esercitata dal Peano; e l'Ascoli chiude l'articolo con questa stupenda osservazione: « Tale, dispersa, e pur fondamentalmente unitaria ci appare la « vita di quest'uomo singolare. Dotato per la ricerca matematica in modo « eminente, si direbbe che egli ne subisse il fascino con riluttanza, sospinto « da altre aspirazioni, più vaste, più universali; sicché l'alba del secolo, con « le sue luminose conquiste — le equazioni integrali, gli integrali di Le- « besgue, l'analisi funzionale — lo trova già distaccato e indifferente, come « indifferente lo trovano i riconoscimenti esteriori. Matematico di insupérata « eleganza, egli rinnega nella matematica ogni motivo di pura bellezza crea- « tiva per correr dietro, umilmente, al mito di una immediata utilità umana. « Non fu facile a tutti comprenderlo, ma come ogni natura istintiva e sin- « cera, ebbe ammiratori entusiasti e detrattori tenaci. Ed è vano, come fa « il Russell, lamentare che egli non fosse abbastanza filosofo, o, come molti « altri, che egli abbia tradito la sua vocazione, e dalla ricerca matematica « nel senso usuale, si sia troppo presto straniato: non si può, all'uomo ge- « niale, domandare di essere diverso da ciò che la sua natura lo ha fatto. « Fu altro il suo compito: spargere *alteri saeculo*, fermenti vitali di pensiero « e di azione, improntare del suo spirito le speculazioni avvenire. E ben può « dirsi che egli lo ha assolto, se i matematici d'oggi legano al suo nome con-

« cezioni di cui egli vide appena il germe e se questo nome è sempre più « familiare alle persone colte in ogni parte del mondo » (pag. 29).

L'articolo di Beniamino Segre si impernia su un'osservazione molto interessante e viene a riprova di quei « fermenti vitali » ai quali si accennava sopra: egli si rivolge all'opera del Peano come ricercatore sull'assiomatizzazione della matematica e alla concezione del Formulario. « ...non è universal« mente noto e riconosciuto quale decisivo effetto orientatore abbiano avuto le « vedute filosofiche e logiche-matematiche di Peano, il suo spirito critico « estremamente sottile e l'attività da lui svolta con la stampa del Formu« lario Mathematico: mentre invece — come vedremo — il Nostro può a « tale riguardo venir considerato come un antesignano dell'odierno movi« mento scientifico vivo ed operante sotto il nome di *Bourbakismo.* La « grande importanza di tale movimento non può venir messa in dubbio, « anche se su esso avremo da fare qualche riserva; va comunque rilevato « che i contributi di Peano in quell'indirizzo non rappresentano che una « parte della sua attività scientifica, e neppure forse quella migliore » (pag. 32). Questo passo ci rivela il motivo dato dal Segre al suo saggio. Egli prende in esame il noto movimento bourbakista, il cui indirizzo si manifesta con l'opera enciclopedica « Eléments de Mathématiques » alla quale, nascosti sotto lo pseudonimo Nicola Bourbaki, collaborano una diecina e più di noti matematici francesi. Il Formulario Mathematico venne pubblicato da Giuseppe Peano « con la più o meno estesa ed anonima colla« borazione di Bettazzi, Burali-Forti, Castellano, Fano, Giudice, Padova, Pa« gliero, Vacca, Vailati, Vivanti e vari altri, fra cui Couturat, D'Arcais, « Morera, Pieri e Severi » e Beniamino Segre pone in rilievo le più significative analogie fra il movimento del Formulario e quello dei Bourbakisti (ricostruzione assiomatica di tutti i risultati, anche quelli tradizionali e loro classificazione sistematica in un ordinamento logico) e osserva « ... l'eco« nomia di pensiero e l'elevata veduta d'assieme offerta dall'assiomatizza« zione, nonché la concezione secondo la quale non sono tanto gli enti mate« matici che interessano quanto le loro proprietà e relazioni mutue, possono « dirsi già sostanzialmente contenute nell'opera di Peano » (pag. 35); e, ancora vengono segnalati i caratteri pei quali i due movimenti si differenziano. Dopo alcune osservazioni sull'assiomatismo, sull'astrattizzazione e le loro conseguenze ai fini della ricerca e sul linguaggio dal quale non si può prescindere, il Segre chiude il suo interessante articolo col dire: « Ed oggi, « a ventitré anni dalla sua scomparsa, possiamo constatare che la geniale « e multiforme personalità scientifica di Giuseppe Peano — anziché affie« volirsi col tempo — è venuta via via giganteggiando ed imponendosi al« l'attenzione del mondo » (pag. 39).

Francesco Barone parla dell'interesse filosofico della logica simbolica di Peano con un breve articolo francamente e simpaticamente aperto verso quegli orientamenti, nei quali si inserì la scuola del Nostro; egli dice che « la componente ideografica della logica simbolica puntua« lizza la posizione del Peano nel rigoglioso sviluppo ottocentesco di que« sta disciplina, e la differenza da quella di altri studiosi particolar« mente attenti agli aspetti formali dei calcoli logici — dal Boole agli ini« ziatori del calcolo delle relazioni —, o agli aspetti costitutivo-assiomatici « che portarono il Frege e il Russell alla formulazione della tesi logistica « della riducibilità della matematica alla logica » (pag. 42) e continua col ricordare l'interesse vivo e immediato suscitato nell'ambiente internazionale da quegli aspetti della logica simbolica e, per contrasto, il giudizio negativo, sommario e sbrigativo o il disdegnoso silenzio dell'ambiente filosofico italiano. Dopo avere citato un giudizio completamente negativo di Benedetto Croce sull'aspetto filosofico della logica matematica coltivata dalla scienza internazionale e dalla scuola italiana e che qui non vale la pena di riportare, il Barone prosegue: « E' doveroso riconoscere che ci troviamo « di fronte a un giudizio estremamente ingiusto, e per diversi motivi. In

« primo luogo, per l'imprecisione di alcuni riferimenti storici e per il fal-
« limento della previsione sulla possibilità della logica simbolica, il cui svi-
« luppo novecentesco costituisce una concreta smentita alla profezia cro-
« ciana. In secondo luogo, poi, per le difficoltà delle stesse argomentazioni
« teoriche... » (pag. 44). « Il giudizio crociano sulla logica simbolica e sul Peano
« rientra quindi nel quadro della sua generale concezione (e svalutazione)
« della scienza, contro cui si sono rivolte appropriatamente le obiezioni dei
« critici. Ma l'idealismo italiano ha subito a lungo l'influsso di tale impo-
« stazione sviante, sicché spesso tra i pur vitali motivi della sua proble-
« matica fu assente l'istanza, così viva nel pensiero contemporaneo, di
« un'attenta considerazione della metodologia scientifica » (pag. 45). L'opinione di chi scrive qui è che il Croce non poteva intendere l'aspetto teorico della costituzione delle strutture formali che sono necessarie alla ricerca scientifica: il Croce e il Peano si trovavano come collocati su piani diversi e l'espressione del Croce non può ritenersi un giudizio ingiusto perché è il discorso di uno che è « sordo » verso l'aspetto filosofico del problema scientifico; tale discorso è, peraltro, molto interessante perché consente, a sua volta, di formarci una opinione sulla filosofia che è fiorita con la scuola del Croce. D'altronde, il Barone comincia il suo articolo col dire: « È nota la prudente
« cautela di Giuseppe Peano di fronte alle implicazioni filosofiche della pro-
« pria opera di logico, ed essa è stata opportunamente sottolineata anche da
« alcuni collaboratori del presente volume » (pag. 41) e, nell'articolo successivo di Ludovico Geymonat, si legge « Non riuscii mai, tuttavia — mal-
« grado la mia insistenza per sapere come giudicasse il valore effettivo
« delle obiezioni russelliane — ad ottenere da Peano una risposta precisa
« in merito. Preferiva ricorrere a parole scherzose o evasive, dicendomi
« trattarsi di questioni filosofiche sulle quali egli "era assolutamente in-
« competente "» (pag. 56) e si potrebbero citare altri passi di questo volumetto: ritorniamo, per esempio, sulla prefazione di Alessandro Terracini; ivi si legge: (pag. 6) « Piene di significato a questo riguardo sono le
« parole che, nella sua Nota autobiografica "My mental development" ha
« scritto Bertrand Russell: "The most important year in my intellectual
« life was the year 1900, and the most important event in that year was my
« visit to the International Congress of Philosophy in Paris.... In Paris in
« 1900 I was impressed by the fact that, in all discussions, Peano and his
« pupils had a precision which was not possessed by others. I therefore
« asked him to give me his works, which he did. As soon as I mastered
« his notation, I saw that it extended the region of mathematical precision
« backwards towards regions which had been given over to philosophical
« vagueness... " ». Ogni commento è superfluo per sottolineare la incompatibilità accennata sopra. Ma, se il Peano fu riluttante a inserirsi in un dialogo filosofico, non lo fu Giovanni Vailati, discepolo del Peano e il Barone ricorda l'opera di questi: le concezioni nuove di definizione, di postulato, di dimostrazione ecc. vengono ad assumere aspetti ben diversi da quelli arcaici perché relativi ai rapporti di dipendenza e di connessione logica che sussistono in un insieme di proposizioni o che si vogliono stabilire in tale insieme. Il Barone termina con l'osservare: « Una più equa valutazione
« filosofica della scuola torinese di logica avrebbe quindi potuto forse con-
« tribuire in misura non indifferente a una più attiva partecipazione della
« cultura italiana allo sviluppo contemporaneo della "filosofia della scienza",
« rendendola al tempo stesso criticamente cauta contro l'accettazione indi-
« scriminata degli estremismi scientistici » (pag. 50).

Veniamo all'articolo di Ludovico Geymonat, anche questo di contenuto filosofico e molto interessante: il Geymonat, dopo aver ricordato come universalmente si sia concordi nel riconoscere perfetta l'aritmetizzazione della scienza matematica secondo il Peano, pone le due domande:
« che giudizio dobbiamo pronunciare sui fondamenti che Peano ha creduto
« di scoprire per la stessa aritmetica? rispondono essi, o no, all'esigenza di

« rigore integrale che caratterizza la scienza del nostro secolo? ». (pag. 51) e, dopo avere ricordato i tre concetti primitivi (zero, numero, successivo) e l'insieme dei famosi cinque postulati, si chiede: « Possiamo riguardare i « postulati di Peano come una definizione implicita del concetto di zero, « di numero naturale e di successivo? La risposta è stata data da B. Rus- « sel ed è decisamente negativa;... » (pag. 52) e interviene qui la critica del Russell che presenta le infinite interpretazioni della classe dei numeri che tutte rispondono ai cinque postulati (per es. 0, 2, 4, 6, 8,...; oppure 100, 101, 102,...). Chi scrive qui ritiene che a fondamento della matematica stia la classe dei numeri interi assoluti, insieme alla sua aritmetica, ed è merito del Peano di avere fatto retrocedere nell'ambito delle « proprietà seriali e ordinali » i concetti primitivi e le proposizioni primitive e di essere passato poi all'aritmetica con le definizioni di addizione e di moltiplicazione senza uscire da quei concetti e da quelle proposizioni: ci sembra che basti la definizione di addizione (in cui lo zero è l'addendo indifferente di fronte all'addizione) per consentire il legame col concetto di «numero cardinale» e per fissare in modo unico l'interpretazione dei numeri: il «dieci» risponde a «dieci dita », il « due » a « due occhi » ecc. come è desiderabile e come richiedono esplicitamente il Russell e coloro (per es. Frege) che preferiscono definire zero, uno, due, ecc. come numeri cardinali. Stando così le cose la critica del Russell risulterebbe priva di consistenza. Il Geymonat esamina le idee del Peano su le « definizioni in matematica » che lo condussero all'analisi del linguaggio, ricorda l'aspirazione di Russell di ridurre la matematica alla logica, riprende argomenti di F. Waismann contenuti nella sua « Introduzione al pensiero matematico » e, chiude il suo interessante articolo col dire: « Questa cautela [del Peano di fronte alle discussioni filosofiche] po- « teva apparire scoraggiante nel 1931-32; non lo appare più oggi, in cui « siamo abituati a diffidare da tutte le teorie (come quelle di Frege e di « Russell) che si presentano quali soluzioni definitive di un qualsiasi pro- « blema filosofico. In altri termini: la posizione del Peano può risultare « sterile se considerata come punto di arrivo; può però risultare estrema- « mente efficace se considerata come punto di partenza, cioè come energico « richiamo a non nasconderci l'enorme complessità filosofica di qualunque « indagine seria sui fondamenti della matematica ».

Tommaso Boggio nel suo breve articolo parla del « Calcolo geometrico » illustrandone i precedenti storici, i principi fondamentali che lo informano, gli sviluppi che ne ha dato il Peano e che sono stati dati successivamente dalla scuola italiana del calcolo vettoriale omografico; il Boggio segnala anche le numerose e interessanti applicazioni.

Fa seguito l'articolo di Ugo Cassina che è il più esteso di tutta la raccolta: esso riguarda il « Formulario Mathematico ». Fra gli allievi del Peano, il Cassina è quello che più di ogni altro ha dedicato in passato l'opera sua, con cura affettuosa, a ricordare, illustrare, precisare, inquadrare l'opera del Maestro: qui si trovano citati diversi scritti pubblicati dallo stesso Cassina sull'argomento. In questo articolo viene presentata al lettore l'anatomia del Formulario: si comincia con i caratteri generali dell'opera, la scrittura ideografica, l'elenco delle varie parti che costituiscono quello che egli chiama il « Formulario completo » la cui pubblicazione va dal 1888 fino al 1913. Si intravvede lo sviluppo e l'evoluzione analoga a quella di un organismo vivente, attraverso metamorfosi, mutazioni e completamenti, fino alla « editio V » (1908) che è quella analizzata in modo speciale. Si vede come il Cassina si muova disinvolto, preciso e da signore nell'estrema concisione dell'allineamento di simboli e la lettura di questo articolo consente al lettore di aderire al concetto espresso dal Segre che presenta il Peano come un vero e sostanziale precursore dei Bourbakisti. Il tomo V del Formulario completo viene sunteggiato e spiegato: il Cassina dice al principio: « ... quanto più si appro- « fondisce lo studio del "Formulario mathematico" (ed. V.), tanto più si « rimane presi dallo stupore e colmi di riverenza per l'uomo che è riuscito « a condensare in modo magistrale, in un libro di modesta mole, una parte

« così grande dellò scibile matematico:... » (pag. 72) ed esamina la lingua usata (vocabulario, orthographia, grammatica, phonetica) per passare poi al contenuto, la cui sommaria presentazione ci fa ammirare la precisa e disciplinata concisione di quell'opera che consente l'approdo ai temi più moderni e avanzati, nell'epoca in cui venne concepita, delle varie parti contenute: per esempio i capitoli VI e VII costituiscono, come dice il Cassina « dei trattati organici di calcolo differenziale e integrale con dimo- « strazioni, osservazioni storico-critiche, esercizi » e il capitolo VIII contiene il metodo costruttivo, dovuto al Peano e già più volte ricordato, delle approssimazioni successive per le equazioni differenziali ed una nuova stesura del teorema di esistenza per i sistemi di equazioni differenziali. Seguono le «Osservazioni finali» nelle quali il Cassina si rivolge all'esame speciale di alcuni punti, alla composizione tipografica, all'elenco dei simboli, ad alcuni dati statistici ecc. E' una visione analitica della imponente e ordinata ricostruzione « ab ovo » effettuata dal Peano e dai suoi collaboratori, che « non « accettano mai supinamente le vedute e i risultati tradizionali, ma li pas- « sano al vaglio del proprio spirito di critico, rielaborandoli col metodo assio- « matico... con profondo senso storico della continuità del pensiero matema- « tico » (B. Segre, pagg. 34, 36).

Chiude la serie degli articoli quello di Ettore Carruccio che rivolge l'attenzione all'aspetto storico e a quello della logica nell'opera del Peano. Egli passa in rassegna, rapida e succosa, la logica deduttiva e, per ciò che riguarda la logica simbolica, il suo sviluppo nel senso di Leibniz, la precisione delle notizie storiche del Formulario, il problema del rigore in matematica e le concezioni didattiche. Su queste ultime il Carruccio così si esprime: « Il « Peano desiderò l'insegnamento della matematica condotto secondo il metodo « storico, d'accordo su questo punto con F. Enriques. Il metodo storico propu- « gnato dal Peano è severo e preciso, consistendo nell'esposizione dei fram- « menti originali, e meglio ancora nello studio diretto delle opere dei grandi « matematici del passato. Nel suo studio dei testi matematici originali egli « era sostenuto da un sicuro dominio del greco e del latino e da profonde « cognizioni di filologia comparata che gli permettevano di interpretare fram- « menti non soltanto di ogni lingua neolatina, ma anche slavi, tedeschi e « perfino giapponesi e cinesi » (pag. 114).

Il volumetto, nella sua veste tipografica curata e nitida, si apre con la riproduzione fotografica di un busto di bronzo, opera di G. B. Alloati, che ritrae Giuseppe Peano.

Dall'analisi e dalle abbondanti citazioni che abbiamo fin qui presentate si può intravedere, come avevamo detto in principio, il grande interesse di questa pubblicazione per la quale dobbiamo essere grati ad Alessandro Terracini che è riuscito a convogliare in essa una così bella collaborazione e al Comitato ordinatore che, in un modo tanto sostanzioso, ha voluto completare le celebrazioni in memoria di Giuseppe Peano.

Ogni studioso che desideri avere una copia di questo volumetto fuori commercio, potrà richiederla al prof. Francesco Bertuzzi, preside del Liceo scientifico « G. Peano » di Cuneo; noi riteniamo che, nei limiti delle disponibilità, il Presidente del Comitato organizzatore sarà lieto di venire incontro al desiderio di coloro che ne vogliano gustare la lettura.

GIOVANNI RICCI

M. PICONE e G. FICHERA, *Trattato di Analisi Matematica Vol. II*, Tumminelli Editore, Roma 1956, pag. 883.

In una recensione del I Volume di questo Trattato, pubblicata in questo Bollettino nel fascicolo del giugno 1954, ho illustrato ampiamente l'indirizzo metodologico a cui si sono ispirati i suoi autori, nonchè il piano generale dell'opera.

Tale piano contemplava un primo volume dedicato allo studio dei fondamenti dell'Analisi algebrica e infinitesimale; un secondo volume rivolto a completare e ad approfondire da un punto di vista tecnico gli argomenti trattati nel primo volume e a mostrarne le prime applicazioni; infine un terzo volume dedicato ai fondamenti della geometria differenziale e dell'analisi superiore. Questo II volume presentato in una eccellente veste tipografica dall'Editore Tumminelli, risponde pienamente a tale piano; esso comprende cinque capitoli, di cui i primi due relativi alla teoria dei polinomi e delle equazioni algebriche, e gli altri tre dedicati rispettivamente alla teoria dell'integrazione, alle serie e alle equazioni differenziali.

Come già nel primo volume la trattazione ha il pregio di un assoluto rigore e si sviluppa con un'ampiezza che pone quest'opera a un livello notevolmente più elevato di quello degli ordinari testi per i corsi di Analisi del primo biennio. Numerose ed assai interessanti sono anche le novità sia di esposizione che di contenuto, che cercherò di illustrare attraverso un esame analitico del contenuto dei singoli Capitoli.

Il Cap. I riguarda la teoria dei polinomi e delle equazioni algebriche e si divide in quattro paragrafi. Di questi il § 1 è dedicato allo studio della divisibilità dei polinomi di una variabile e il § 2 allo studio delle radici di un'equazione algebrica ad una incognita. Da notare in questo § 2 alcuni interessanti complementi alla ordinaria teoria delle funzioni razionali e le formule generali di interpolazione razionale intera contenute nel n. 11.

Di impostazione nuova, anche se in parte ispirata al trattato di Algebra del Perron, la trattazione, svolta nel § 3, della teoria della divisibilità fra polinomi di più variabili.

Il § 4 infine è rivolto allo studio dei sistemi di due equazioni algebriche in due incognite.

Ancora alle equazioni algebriche è dedicato il Cap. II, in cui si prende in considerazione il problema della separazione e del calcolo delle radici di tali equazioni.

Nel § 1, sulla ubicazione delle radici di un'equazione algebrica, sono esposti in forma nuova e spesso perfezionata i classici teoremi di Budan-Fourier, Routh, Hurwitz ecc., mentre il § 2 è dedicato alla risoluzione numerica delle equazioni.

L'esposizione è qui fortemente influenzata dall'esperienza acquisita dagli Autori, attraverso l'opera dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. E accanto ai metodi classici altre ne vengono esposti che sono del tutto nuovi. Molto interessanti a questo proposito sono il metodo generale interpolatorio, applicabile anche al calcolo delle radici di equazioni non algebriche, esposto alla fine del n. 31 e il contenuto dell'intero n. 32 dedicato alla ricerca delle radici complesse di un'equazione.

Il Cap. III di oltre duecento pagine è il più lungo del volume ed è interamente dedicato alla teoria dell'integrazione. Poichè i fondamenti di tale teoria erano stati già esposti nel Vol. I, questo capitolo verte soprattutto sulla tecnica dell'integrazione. Esso si divide in quattro paragrafi di cui il primo riguarda l'estensione della nozione di integrale al caso di funzioni anche non continue definite in un dominio limitato o anche non limitato e gli altri tre sono dedicati rispettivamente agli integrali semplici doppi e tripli. Sarebbe assai lungo di illustrare le molte novità sia di impostazione che di dettaglio che rendono apprezzabile questo Capitolo. Ci limiteremo perciò a segnalare alcune delle sue particolarità più notevoli. Tra queste sono senz'altro la grande generalità dei teoremi relativi agli integrali dipendenti da un parametro (nn. 41, 50, 63) e in particolare un teorema sull'invertibilità dell'ordine di integrazione per integrali impropri esposto nel n. 41, l'estrema cura e l'ineccepibile rigore con cui sono redatti i nn. 49, 51, 56 dedicati all'area di una superficie e al cambiamento di variabili negli integrali doppi e tripli e infine la trattazione veramente esauriente dei teoremi integrali di Green e di Stokes (nn. 47, 53, 54). Tale trattazione si fonda su di una acuta analisi (nn. 45 e 53) della nozione di dominio regolare piano o spaziale, che non lascia nessun margine all'intuizione. La validità della formula di Green è acquisita anche per il caso di un dominio non limitato di frontiera limitata in ipotesi molto generali sul comportamento all'infinito della funzione integranda. Un'altra estensione della formula di Green (n. 62) riguarda il caso in cui la funzione integranda ha certe discontinuità che possono presentarsi in punti isolati per le funzioni di due variabili e in punti isolati o lungo linee nel caso di tre variabili. Tale estensione è fondata sullo studio delle formole di quadratura e di cubatura (nn. 58, 59, 60) per i domini di forma tubolare oppure stratificati. Queste formule sono assai interessanti anche di per sè perchè danno eleganti generalizzazioni dei teoremi di Guldino.

Noteremo infine l'accurato studio delle singolarità che può presentare la funzione primitiva di una forma differenziale in due variabili (n. 46) e la formulazione generale dei teoremi di Cauchy e di Morera contenuta nello stesso numero; lo studio di queste questioni è fondato su una esposizione veramente impeccabile della teoria della connessione dei campi piani.

Passiamo ora ad occuparci del cap. IV dedicato alla teoria delle serie. I paragrafi 1 e 2, che riguardano rispettivamente le serie numeriche semplici e multiple e le serie di funzioni, sono di contenuto classico. Vi è tuttavia da notare una interessante estensione delle condizioni di validità della regola di derivazione delle funzioni composte, ottenuta come applicazione dei teoremi sulle successioni uniformemente convergenti.

Il § 3 riguarda la teoria delle serie di potenze considerate sia nel campo reale che nel campo complesso e come applicazione lo studio dei punti singolari isolati delle funzioni olomorfe. Sono da notare in questo paragrafo i nn. 74 e 77 che vertono sulla tecnica del calcolo con le serie di potenze, il n. 80 in cui sono contenute varie nuove espressioni integrali del resto di una serie di potenze semplice o multipla, e il n. 81 sulla approssimazione delle soluzioni di sistemi di equazioni, sia nel campo reale che nel campo complesso. In questo numero, accanto ad una perspicua esposizione del metodo delle approssimazioni successive, che fornisce anche un nuovo criterio sufficiente d'esistenza della soluzione di un sistema di equazioni, sono proposti dei nuovi metodi basati su di uno speciale procedimento per la ricerca del minimo di una funzione, che l'uso delle moderne calcolatrici elettroniche potrebbe rendere assai utilmente applicabile.

Il § 4 infine riguarda le nozioni fondamentali sui prodotti infiniti con alcune applicazioni alle funzioni euleriane.

L'ultimo capitolo del volume è dedicato alle equazioni differenziali.

Notevole in questo capitolo l'ampiezza del § 2 dedicato alle equazioni a derivate parziali, in cui sono svolti in modo chiaro e conciso i primi elementi della teoria delle funzioni armoniche, fino a pervenire all'integrale di Poisson per le funzioni sia di due che di tre variabili. Interessante è anche l'elegante trattazione del problema di Cauchy per le funzioni armoniche di due variabili.

Gli altri tre paragrafi del capitolo sono dedicati alle equazioni ordinarie. Notevoli nel § 1, che riguarda i teoremi generali di esistenza e di unicità, alcune precisazioni sul concetto di integrale generale.

I paragrafi 3 e 4 sono poi dedicati ai metodi di integrazione delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali.

Accanto agli sviluppi classici dei nn. 97 e 98, 101, i nn. 100 e 102 contengono alcune novità degne di rilievo. La prima, contenuta nel n. 100, è una trattazione dei sistemi lineari di qualsiasi ordine svolta mediante l'uso di nuclei risolventi senza far ricorso al metodo della variazione delle costanti arbitrarie, la seconda è lo studio, svolto nel n. 102, dei sistemi a coefficienti costanti di tipo anche non normale.

Per concludere io non posso che confermare l'impressione già ricevuta dalla lettura del I volume e cioè che quest'opera arreca un importante contributo alla trattatistica italiana. È da augurarsi che essa possa al più presto essere completata con la pubblicazione del terzo volume.

CARLO MIRANDA

WILHELM BLASCHKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie.* Dritte Auflage. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1955. Un volume di pp. VIII-130, con 44 figure.

È ben noto che la Geometria Integrale ha per oggetto gli invarianti integrali delle figure. Sorta da questioni attinenti alle probabilità geometriche, essa, nei suoi successivi sviluppi, si è solo raramente ripiegata su applicazioni al calcolo delle probabilità, ma ha invece estese le sue conquiste ampliando lo spazio in cui operava e le trasformazioni rispetto alle quali richiedeva l'invarianza.

Il Professor Blaschke ha il merito di aver dato un forte impulso a questi studi, circa vent'anni or sono, sia con magistrali suoi contributi, sia con corsi di lezioni, sia elaborando per primo una sistemazione organica della materia, sia promovendo una scuola, le cui ricerche segnano suggestive conquiste e portano nomi di cultori fra i più cospicui di questo argomento.

La prima parte delle *Vorlesungen über Integralgeometrie* apparve nel 1935, e, in seconda edizione ampliata, nel 1936: essa presentava la Geometria Integrale del piano euclideo. La seconda parte, contenente la Geometria Integrale dello spazio euclideo, uscì nel 1937. La materia di entrambi i volumetti del 1936 e del 1937, con qualche aggiunta, si presenta ora, in questa terza edizione, raccolta in un solo libro, che contiene tre capitoli.

Il primo capitolo, dedicato al piano euclideo, si impernia sui concetti di densità di punti e di rette, e di densità cinematica. Vi si trovano classici risultati del Crofton, la cosiddetta formula del Poincaré, vari eleganti contributi del Santaló, la formula cinematica principale dello stesso Blaschke, ecc..

Il secondo capitolo, dedicato allo spazio euclideo, si appoggia analogamente alle densità di punti, rette, piani, e alla densità cinematica. Vi campeggiano molte belle formule relative agli ovaloidi, alcune delle quali dovute a Steiner, Cauchy, Crofton, Herglotz, Berwald.

Il terzo capitolo riguarda i poliedri dello spazio euclideo. Sono dedotte le formule cinematiche principali relative a una coppia e a una terna di campi, ne sono date applicazioni ed estensioni, ecc. Un paragrafo, aggiunto nella nuova edizione tratta della densità cinematica nella geometria non euclidea.

Ogni capitolo è corredato da interessanti esercizi e complementi.

Si rilevano in questa edizione parecchi riferimenti alla moderna letteratura: non soltanto nella ricca e aggiornata bibliografia, che sta in fondo al volume, ma anche nel testo, con rimandi a recenti libri e memorie di Alexandrow, Blaschke, Chern, Hadwiger, Jaglom e Boltjanski, Legrady, Müller, Nöbeling e Schmidt.

Quantunque altre pregevoli trattazioni d'insieme sulla Geometria Integrale siano apparse in questi ultimi anni — come la *Geometría Integral* di Rey Pastor e Santaló (1951) e la *Introduction to Integral Geometry* del Santaló (1953) — quest'opera del Blaschke è sempre indispensabile ai cultori della Geometria Integrale, sia per la ricchezza dei risultati in essa raccolti, che per i pregi di organicità, chiarezza ed eleganza.

L'Autore ricorda nella prefazione, come suo ispiratore, lo Herglotz, al quale era dedicato il volumetto del 1937, e dedica questa terza edizione a Chern, Hadwiger e Santalò, suoi collaboratori nel far progredire la Geometria Integrale. Infine, egli chiude il libro (come il volumetto del 1937) ricordando che dal Padre suo ereditò l'amore per il pensiero geometrico steineriano, le cui tracce spera si sentano anche in queste pagine.

GIUSEPPINA MASOTTI BIGGIOGERO

A. Speiser, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1956, pp. XI + 271 (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Bd. 22, D.M. 26).

Questo volume è ormai un classico della letteratura sulla teoria dei gruppi finiti. Giova tuttavia cogliere l'occasione dell'apparire di una nuova edizione — la quarta — per dare un cenno illustrativo di tale opera, ciò non essendo stato fatto finora in questo periodico.

Il trattato consta di un'introduzione e di 17 capitoli e si conclude con un'appendice, aggiunta nell'attuale edizione.

Nella prima parte dell'introduzione, che è di carattere storico, l'Autore esamina quali siano le origini remote del concetto di gruppo, e quali nozioni, conosciute fin dall'antichità, siano collegate con la teoria dei gruppi. Esse si possono riassumere — da un lato — nella teoria dei poliedri regolari, contenuta già negli elementi di Euclide e nelle ricerche di Platone, e — dall'altro — nelle manifestazioni dell'arte egizia, greca ed araba, che si estrinsecano in disegni ornamentali, basati sulle simmetrie di una data figura; si nota a tale riguardo che le simmetrie degli ornamenti egizi ed arabi non sono state a tutt'oggi oggetto di studio, onde « resta ancora da scrivere uno dei più bei capitoli della storia della matematica ».

La seconda parte dell'introduzione è dedicata ad illustrare come il concetto di gruppo sorga da quello, più generale, di gruppoide.

Per quanto concerne il contenuto dei capitoli successivi, il piano generale del trattato può così riassumersi: in una prima parte che comprende i capitoli I - IV, l'Autore si occupa fondamentalmente di gruppi astratti. Segue, dal capitolo VII al XIV, lo svolgimento della teoria dei gruppi in relazione alle loro possibili rappresentazioni, e lo studio più approfondito di quei tipi di gruppi che in esse intervengono. Nei capitoli VI e VII vengono descritti, come applicazione della teoria dei gruppi, vari disegni ornamentali, con i relativi gruppi di simmetrie e vengono classificati i reticoli piani e spaziali e le singole classi di cristalli. Un'applicazione più strettamente matematica, svolta nel capitolo XVII, è la teoria delle equazioni secondo Lagrange, Galois e Klein.

Il breve schema che abbiamo tracciato ci sembra sufficiente a dare un'idea del volume. Vogliamo tuttavia diffonderci un po' sull'argomento sviluppato nell'appendice, il che potrà interessare anche chi già conosca una delle precedenti edizioni dell'opera. Si tratta del problema dei ricoprimenti del piano con m-goni regolari, nelle tre geometrie iperbolica, parabolica, ellittica. Se si mandano dal centro di un m-gono le rette a due vertici consecutivi si ottiene un triangolo isoscele nel quale, detti $2\pi/m$ l'angolo al centro, $2\pi/n$ la somma dei due angoli alla base, si perviene al caso ellittico, parabolico o iperbolico a seconda che $1/m + 1/n \gtreqless 1/2$.

L'Autore si sofferma a studiare il caso del piano iperbolico, ricorrendo alla nota rappresentazione conforme di questo su di un cerchio del piano euclideo. Ricoprendo nel modo detto il piano iperbolico, si ottengono delle configurazioni, studiate anche dal Klein (« Kleinschen Kreisfiguren »), delle quali vengono illustrati dettagliatamente alcuni esempi e caratterizzati i relativi gruppi di simmetrie. È trattato, infine, il problema della colorazione delle figure ornamentali, a partire dalla legge che campi ugualmente colorati siano mutati in sè da un sottogruppo del gruppo completo delle simmetrie di quelle. L'Autore dà anche una esemplificazione di quanto ha esposto, corredando il libro di una suggestiva tavola a colori, e lascia intravedere una via per sviluppare un'analoga teoria nel caso spaziale.

Caratteristica del volume è la chiarezza nell'esposizione dei vari argomenti e la fusione di questi in un tutto organico. Lo Speiser é riuscito a raccogliere in un trattato maneggevole, arricchito da numerosi disegni illustrativi, la teoria dei gruppi finiti, presentandone inoltre alcune applicazioni che escono dal campo della pura matematica, come lo studio della struttura dei cristalli e dell'arte ornamentale, alla quale — secondo quanto afferma l'Autore — la teoria stessa può, in certo senso, fornire nuove fonti di ispirazione. Ricorrono nel testo frequenti indicazioni bibliografiche e riferimenti di carattere storico, che vieppiù accrescono l'interesse della lettura.

MARIA SCAFATI

B. RUSSELL, *I principi della matematica*, traduzione dall'inglese di L. Geymonat, Longanesi, Milano, 1951, pp. 934.

I « Principi della matematica » (titolo inglese: *The principles of mathematics)*, pubblicati per la prima volta nel 1903 e ristampati in diverse riprese in questi ultimi decenni, costituiscono il primo notevole lavoro dedicato da B. Russell allo studio sui fondamenti della matematica. La loro importanza nella storia del pensiero filosofico-scientifico della prima metà di questo secolo è fondamentale non soltanto perchè essi costituiscono la base della corrente logicista nell'interpretazione del fenomeno matematico, ma perchè la loro influenza toccò tanta parte degli studi gnoseologici e metodologici moderni.

Infatti, molte fra le attuali realizzazioni della matematica, suppur divergenti lungo le direttrici formalistica od intuizionistica, o legate alla interpretazione neopositivistica della scienza, o sviluppantisi lungo le linee d'un più indipendente pensiero, passano in modo più o meno diretto attraverso l'opera russelliana per collegarsi a quell'attività di chiarificazione e di rinnovamento che, nella seconda metà dell'ottocento, con i lavori di Schröder, Boole, De Morgan, Peirce, e specialmente, Dedekind, Cantor, Frege e Peano, diede alla matematica moderna quella struttura che le permise il suo rapido e meraviglioso progresso.

Dal 1903 ad oggi la posizione di Russell è passata attraverso elaborazioni e mutamenti spesso notevolissimi, ma lo stesso autore ha voluto che i suoi « Principles » restassero inalterati nella nuova edizione, a rappresentare un punto storicamente ben definito nel processo di studio dei fondamenti della matematica. L'aggiornamento concettuale è contenuto in una *Introduzione* alla seconda edizione di una ventina di pagine.

L'opera è costituita da sette parti dedicate rispettivamente ai seguenti argomenti: I - Gli indefinibili della matematica; II - Numeri; III - Quantità; IV - L'ordine; V - Infinità e continuità; VI - Spazio; VII - Materia e moto.

I « Principles of mathematics » trovano la loro sostanziale enucleazione *nell'interpretare la matematica come parte della logica;* di tale tesi essi costituiscono una affermazione ed un commento, mentre i successivi « Principia Mathematica », scritti in collaborazione col Whitehead, ne rappresentano la « magna charta » dal punto di vista non solo concettuale ma sopratutto tecnico-formale.

La posizione di Russell, secondo quanto lo stesso autore esplicitamente dichiara, s'innesta particolarmente sull'opera di Peano, alla cui limpida realizzazione di una matematica aritmetizzata lo scrittore inglese accompagna la riduzione dell'aritmetica alla logica attraverso l'analisi del significato e dell'uso delle costanti logiche, attraverso la definizione del numero come classe di classi, la chiarificazione del concetto di funzione proposizionale, che tanta parte dovrà avere negli sviluppi della logica moderna e della teoria degli insiemi, e così via.

Come è noto, uno dei punti di partenza per questo sviluppo di pensiero fu la constatazione che gli assiomi di Peano non definivano univocamente i numeri naturali, e che, se da un lato essi ponevano mirabilmente a fuoco la struttura operativa dell'aritmetica, d'altro canto non ne permettevano l'applicazione alle comuni operazioni del contare; ce ne davano in altri termini l'aspetto formale senza fissarne il valore contenutistico.

A questo proposito va osservato come i « Principles » costituiscano forse il momento ontologicamente più acuto della personalità russelliana. In essi è sostenuta la credenza nella realtà oggettiva dei numeri; « al tempo in cui scrivevo i Principles dividevo con Frege la credenza nella realtà platonica dei numeri, i quali, nella mia immaginazione, popolavano il regno senza tempo dell'essere. Era una fede consolante, che in seguito abbandonai con rimpianto » così scrive l'autore nella introduzione alla seconda edizione.

Su questa base oggettiva si sviluppa tutta l'opera, della quale è ancor oggi forse interessante richiamare alcuni punti caratteristici.

Per Russell in ciò preceduto da Frege e da Cantor, il numero naturale nasce in una prospettiva *cardinale*, che si realizza nel concetto di corrispondenza biunivoca tra gli elementi di tutte le classi ugualmente numerose fra loro; si ricordi che nell'opera di Dedekind era invece accentuato l'aspetto *ordinale* del numero.

La definizione del numero come classe di classi è uno degli esempi più vivi del processo di riduzione della matematica alla logica; e la credenza nella realtà oggettiva delle classi rende chiara l'affermazione che la conoscenza matematica è *scoperta* di entità e di rapporti ontologicamente significativi: « l'aritmetica deve essere scoperta proprio nello stesso senso in cui Colombo scoprì le Indie Occidentali, e noi non possiamo creare numeri più di quanto Colombo abbia creato indiani. Il numero 2 non è puramente mentale, ma è una entità a cui si può pensare. Tutto ciò che può essere pensato ha l'essere, e il suo essere è una precondizione, non un risultato, del suo essere pensato (Principi della matematica, pag. 794-795) ».

Un altro aspetto della posizione russelliana nei « Principles » è l'antinconvenzionalismo, in opposizione, ad esempio con quella che sarà la tesi di Carnap, anticonvenzionalismo mantenuto pure in questa edizione dell'opera.

Si è accennato in precedenza allo sviluppo di pensiero lungo il quale la posizione russelliana è venuta passando nei decennni successivi al primo apparire dei « Principles ». Il motivo fondamentale di questo evolversi concettuale è rappresentato dalla notevole attenuazione del platonismo primitivo, attraverso la teoria dei *simboli incompleti,* i quali sono significativi non di per sè ma nella proposizione in cui si trovano, attraverso la soppressione del concetto ontologico delle classi, le quali sono ora concepite come simboli incompleti, e quindi come semplici strutture simboliche; il tutto in un ambiente dominato dal tremendo scenario costituito dalla comparsa delle antinomie.

La posizione russelliana viene quindi ad avere punti di contatto con la corrente neopositivistica sull'aspetto *linguistico* della logica e della matematica, con la interpretazione intuizionistica brouweriana nell'assunzione di un atteggiamento *costruttivistico*, ferma restando la intima fiducia nella riducibilità della matematica alla logica.

A questo proposito si può notare come ancora una volta lo sviluppo storico della problematicità scientifica ponga in luce una profonda compenetrazione fra le varie tendenze rappresentate dalle singole scuole, ognuna delle quali mette in evidenza alcuni aspetti del perenne problema della conoscenza umana, senza per altro poter aspirare ad una esclusività che è quasi sempre in contrasto con la natura stessa del pensiero umano.

Infine è doveroso ricordare l'opera del traduttore, Prof. Ludovico Geymonat, che ha posto a disposizione del pubblico italiano, attraverso una limpida e viva traduzione, una delle opere più significative del pensiero europeo contemporaneo.

FRANCESCO LERDA

HORST VON SANDEN, *Praxis der Differentialgleichungen,* Vierte, erweiterte Aufl., mit 21 Abb., 114 pp., Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1955; DM 6.80.

È questa la 4ª edizione, con qualche aggiunta, di un libro scritto nel 1942 con lo scopo di fornire agli Ingegneri ed ai tecnici i mezzi più comuni e più utili per l'integrazione approssimata di equazioni differenziali ordinarie.

La prima parte riguarda il problema iniziale essenzialmente per la equazione $y' = f(x, y)$ e l'equazione $y'' = f(x, y, y')$, nella seconda parte sono trattati problemi ai limiti per le equazioni del 2° ordine, prevalentemente quelle lineari.

Scritto in forma agile e facilmente accessibile anche a chi possieda i soli elementi dell'Analisi, il libro è certo di notevole utilità per coloro che debbano risolvere praticamente, fino al calcolo numerico, quei problemi connessi alle equazioni differenziali ordinarie che più frequentemente si presentano nelle applicazioni.

ROBERTO CONTI

W. D. KUPRADSE, *Randwertaufgabe der Schwingungstheorie und Integralgleichungen,* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956, pp. VIII + 239.

È la traduzione in tedesco dell'opera apparsa in russo nel 1950, ma con qualche rifacimento e qualche aggiunta. L'autore ha qui raccolto, in forma monografica, un ampio gruppo di risultati da lui ottenuti e concernenti lo studio di problemi al contorno per le equazioni delle oscillazioni dei corpi elastici; tali problemi, cui si riferiscono anche altre questioni fisico-matematiche di notevole interesse teorico e pratico, vengono affrontati estendendo la teoria del potenziale che, già applicata all'equazione di Laplace, porta ad equazioni integrali.

L'opera consta dei seguenti capitoli: I. Proprietà generali dell'equazione delle oscillazioni e dei suoi integrali. II. Soluzione dei principali problemi al contorno per regioni esterne. III. Problemi al contorno dedotti dalla teoria delle oscillazioni elettromagnetiche. IV Oscillazioni stazionarie dei corpi elastici. V. Equazioni integrali singolari.

Precede un'introduzione in cui vengono esposti i fondamenti del metodo e in cui si danno riferimenti storici: è, a tale proposito, ricordato il contributo della Scuola Italiana (Lauricella, Marcolongo, Cerrutti e Boggio) alla trattazione completa del primo problema al contorno del caso statico.

RENATO NARDINI