Bollettino Unione Matematica Italiana

Landolino Giuliano

Sopra le equazioni differenziali lineari autoaggiunte del terzo ordine.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.1, p. 16–18.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_1_16_0>

Sopra le equazioni differenziali lineari autoaggiunte del terzo ordine.

Nota di LANDOLINO GIULIANO (a Pisa)

Sunto. - *Si dimostra che la classe delle equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine il cui integrale generale è dato da un'espressione quadratica* $z = ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2$, *dove* $y_1(x)$ *e* $y_2(x)$ *sono due integrali linearmente indipendenti dell'equazione differenziale* $y'' = q_1(x)y' + q_2(x)y$ *e* a, b, c *costanti arbitrarie, è costituita* unicamente *dalle equazioni autoaggiunte.*

Nel cercare se era possibile risolvere in termini finiti una certa equazione differenziale lineare del terzo ordine, di cui mi era stato proposto lo studio, mi sono chiesto se, almeno, la sua integrazione poteva razionalmente farsi dipendere da quella di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine o, anche, se essa ammetteva qualche integrale primo.

La domanda era naturale perchè, com'è noto, per le equazioni autoaggiunte lineari omogenee del terzo ordine, vale la seguente proprietà [1]:

« Le soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea « autoaggiunta del terzo ordine si possono esprimere come forma « quadratica a coefficienti costanti di due funzioni che siano inte« grali fra loro linearmente indipendenti di un'equazione differen« ziale lineare omogenea del secondo ordine [2] ».

L'equazione che avevo da studiare non era autoaggiunta e però mi sono chiesto se essa, per caso, aveva egualmente la proprietà ora indicata per le equazioni autoaggiunte. Mi sono proposto perciò la seguente questione:

« Ricercare la classe delle equazioni differenziali lineari omo« genee del terzo ordine il cui integrale generale fosse dato da « un'espressione quadratica

$$z = ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2$$

« dove $y_1(x)$ e $y_2(x)$ siano due integrali linearmente indipendenti

[1] V. p. es. G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale*. Parte prima, Zanichelli, Bologna, 2ª ed. 1948, pp. 110-111.

[2] Precisamente, data l'equazione autoaggiunta del terzo ordine: $\left[\frac{d^2}{dx^2}[A_0y'] + \frac{d}{dx}[A_0y'']\right] + \left[\frac{d}{dx}[A_1y] + A_1y'\right] = 0$, l'equazione del secondo ordine, di cui si parla nell'enunciato è: $4A_0z'' + 2A_0'z' + A_1z = 0$; v. SANSONE, loc. cit. p. 111.

« dell' equazione differenziale:

$$y'' = q_1(x)y' + q_2(x)y$$

« e a, b, c, costanti arbitrarie ».

Ho trovato che tale classe è costituita *unicamente* dalle equazioni autoaggiunte ([3]).

1. Cominciamo col provare il seguente facile

TEOREMA. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè l' equazione differenziale lineare del terzo ordine:*

$$y''' + \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = 0 \tag{1}$$

sia autoaggiunta è che si abbia:

$$54\gamma - 27\beta' - 18\alpha\beta + 9\alpha'' + 18\alpha\alpha' + 4\alpha^3 = 0 \tag{2}$$

La forma generale di un' equazione lineare omogenea autoaggiunta del terzo ordine è, com' è noto ([4]):

$$2A_0 y''' + 3A_0' y'' + (2A_1 + A_0'')y' + A_1' y = 0 \tag{3}$$

e, se la (1) è autoaggiunta, deve essere identicamente:

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{A_0'}{A_0}, \quad \beta = \frac{2A_1 + A_0''}{2A_0}, \quad \gamma = \frac{A_1'}{2A_0}. \tag{4}$$

Ricavando A_0 e A_1 dalle prime due si ha:

$$A_0 = e^{\frac{2}{3}\int \alpha dx}, \qquad A_1 = \beta e^{\frac{2}{3}\int \alpha dx} - \frac{1}{3}\alpha' e^{\frac{2}{3}\int \alpha dx} - \frac{2}{9}\alpha^2 e^{\frac{2}{3}\int \alpha dx}$$

e sostituendo nella terza si ottiene facilmente la (2).

Viceversa, supposto la (2) verificata, determinando A_0 e A_1 risolvendo le prime due delle (4), la terza di queste risulta verificata in virtù della (2). È dunque possibile determinare A_0 e A_1 in modo che la (1) possa scriversi nella forma (3) e la (1) è perciò autoaggiunta.

([3]) Cfr. anche G. GALLINA: *Su una classe di equazioni differenziali lineari del terzo ordine*, Bollettino dell' U. M. I. Vol. XII, 1933, pp. 142-145. In questa nota il GALLINA afferma che, oltre le equazioni autoaggiunte, esistono altre equazioni lineari omogenee del terzo ordine che hanno la proprietà indicata nel testo. L' equivoco in cui Egli è caduto si spiega se si tiene presente che, all' inizio della sua Nota, Egli non si riferisce alla *generale* equazione lineare omogenea del terzo ordine, ma solo alla seguente *particolare* (forma ridotta) di tale equazione: $y''' + 4\alpha y' + 2\alpha' y = 0$. La condizione che trova il GALLINA non è infatti che la (2) a cui qui si perviene e che esprime, come qui viene provato, una relazione caratteristica delle equazioni lineari omogenee autoaggiunte del terze ordine.

([4]) V. SANSONE loc. cit. ([1]) p. 110.

2. Osserviamo ora che l'equazione:

$$(5) \qquad y''' + 3q_1y'' + (4q_2 + q_1' - 2q_1^2)y' + (2q_2' - 4q_1q_2)y = 0$$

è autoaggiunta, come risulta subito, per es. dalla (2).

Il suo integrale generale è perciò dato dalla forma quadratica

$$y = az_1^2 + 2bz_1z_2 + cz_2^2$$

dove z_1 e z_2 sono due integrali linearmente indipendenti dell'equazione:

$$z'' = q_1z' + q_2z.$$

Per quanto infatti abbiamo ricordato nella nota (²), l'equazione del secondo ordine collegata — per dir così — all'equazione (5) è:

$$4A_0z'' + 2A_0'z' + A_1z = 0$$

dove si faccia [5]:

$$A_0 = e^{-2\int q_1dx}, \qquad A_1 = -4q_2e^{-2\int q_1dx}.$$

È chiaro poi che ogni equazione lineare omogenea autoaggiunta del terzo ordine può mettersi sotto la forma (5).

3. Lo scopo centrale di questa Nota è di dimostrare il seguente:

TEOREMA. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un' equazione lineare omogenea del terzo ordine sia autoaggiunta è che le sue soluzioni si possano esprimere come forma quadratica di due funzioni che siano integrali fra loro linearmente indipendenti di un' equazione lineare omogenea del secondo ordine.*

Infatti, se

$$z'' = q_1z' + q_2z$$

è l'equazione lineare omogenea del secondo ordine che ammette le due soluzioni z_1 e z_2 fra loro linearmente indipendenti e

$$(6) \qquad y''' = \alpha y'' + \beta y' + \gamma y$$

è un'equazione lineare omogenea del terzo ordine le cui soluzioni sono tutte espresse dalla forma quadratica

$$(7) \qquad y = az_1^2 + 2bz_1z_2 + cz^2$$

con a, b, c, costanti arbitrarie, la (7) soddisferà anche la (5) e poichè la (5) è irriducibile, le (5) e (6) coincideranno, cioè la (6) è autoaggiunta.

La condizione è perciò *sufficiente.*

Come ho ricordato nell'introduzione, la condizione è anche *necessaria.*

[5] V. anche A. CHIELLINI, *Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine*, « Bollettino dell' U. M. I. », Vol XII, 1933, pp. 134-137.