Bollettino Unione Matematica Italiana

Tristano Manacorda

Relazioni fra deformazione e stato di tensione per un generico solido incomprimibile a trasformazioni reversibili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.1, p. 1–8.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Relazioni fra deformazione e stato di tensione per un generico solido incomprimibile a trasformazioni reversibili.

Nota di Tristano Manacorda (a Parma)

Sunto. - *Si precisa la forma che, per ogni particella di un generico sistema continuo incomprimibile a trasformazioni reversibili, assumono le relazioni sforzi-deformazione quando si facciano figurare esplicitamente le caratteristiche principali di deformazione e l'orientamento della terna principale di deformazione rispetto ad un sistema prefissato di riferimento.*

1. Mi propongo di stabilire la forma delle relazioni che devono sussistere tra deformazione e stato di tensione interna per un generico sistema incomprimibile a trasformazioni reversibili quando si desideri far figurare esplicitamente, per ciascuna particella, le caratteristiche principali di deformazione rispetto ad una terna di riferimento prefissata. Analoghe relazioni per il caso di solidi comprimibili sono già state ottenute da tempo da A. Signorini (1) ma qui, oltre alle inevitabili differenze dovute alla presenza del vincolo di incomprimibilità, ho preferito adottare un sistema affatto generico di coordinate di tipo sostanziale, e una conseguente definizione più generale del consueto del tensore di deformazione e di quello degli sforzi (2). Col vantaggio che le relazioni così ottenute non sono ristrette ad uno speciale tipo di riferimento e comprendono come caso particolare quelle relative ad un sistema

(1) A. Signorini, *Trasformazioni termoelastiche finite*, « Mem. 1ª, Ann. Mat. pura e appl. », (4), T. XXII (1943), pp. 33-144, Cap. III, n. 6.

(2) Cfr. A. E. Green e W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Oxford, 1954, Cap. II.

lagrangiano di coordinate. Consentono inoltre di stabilire agevolmente una semplice proprietà (valida anzi anche per i sistemi non soggetti al vincolo di incomprimibilità) necessaria e sufficiente ad assicurare che il solido sia isotropo nella configurazione di riferimento.

2. Sia S un sistema materiale continuo, C_* e C due sue configurazioni, P_* e P una generica coppia di punti corrispondenti nella trasformazione regolare $C_* \rightarrow C$. Indico con $y_h (h = 1, 2, 3)$ le coordinate cartesiane di P_* rispetto ad una prescelta terna trirettangola di riferimento $\mathcal{T}$, e con $x_h (h = 1, 2, 3)$ le coordinate cartesiane di P rispetto alla medesima terna; ma al tempo stesso introduco tre parametri z^λ $(\lambda = 1, 2, 3)$ a carattere molecolare, con la sola condizione di essere in corrispondenza biunivoca con le y_h (e perciò anche, per ogni C, con le x_h). Con riferimento alle coordinate generali z^λ indico con $a_{\lambda\mu}$ i coefficienti della metrica in C_*

$$a_{\lambda\mu} = \frac{\partial P_*}{\partial z^\lambda} \times \frac{\partial P_*}{\partial z^\mu}, \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3) \tag{2,1}$$

e con $b_{\lambda\mu}$ quelli della metrica in C,

$$b_{\lambda\mu} = \frac{\partial P}{\partial z^\lambda} \times \frac{\partial P}{\partial z^\mu}, \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3). \tag{2,2}$$

In tal modo, posto

$$2\gamma_{\lambda\mu} = b_{\lambda\mu} - a_{\lambda\mu}, \tag{2,3}$$

il tensore doppio simmetrico covariante $\gamma_{\lambda\mu}$ è il tensore di deformazione relativo alla trasformazione $C_* \rightarrow C$.

Conviene forse osservare che, facendo coincidere le z^λ con le y_h, le γ_{hk} corrispondenti non differiscono dalle ordinarie caratteristiche di deformazione diretta ε_{hk}, mentre quando si identifichino le z^λ con le x_h le $\bar{\gamma}_{hk}$ corrispondenti vengono a coincidere con le caratteristiche della deformazione inversa, $\bar{\varepsilon}_{hk}$, col segno cambiato [3].

Comunque, converrà talvolta ricorrere a notazioni ad un solo indice ponendo

$$\gamma_{\lambda\lambda} = \gamma_\lambda, \qquad 2\gamma_{\lambda+1\ \lambda+2} = \gamma_{\lambda+3} \qquad (\lambda = 1, 2, 3). \tag{2,4}$$

In ogni caso, il tensore $\gamma_{\lambda\mu}$ è un tensore simmetrico, e perciò, con riferimento ad una particella P_* ed alla trasformazione

[3] A. SIGNORINI, luogo cit. in [1], Cap. I.

$C_* \to C$, possiede sempre almeno una terna principale $\mathcal{T}_\gamma$. Indicherò con Γ_h ($h = 1, 2, 3$) le componenti del tensore di deformazione rispetto a $\mathcal{T}_\gamma$ (caratteristiche principali di deformazione).

Indico infine con $\mathfrak{D}$ il determinante iacobiano delle x rispetto alle y, da intendersi sempre positivo. Rappresentando $\mathfrak{D} - 1$, per ogni particella, la dilatazione cubica nella trasformazione $C_* \to C$, con le notazioni qui adottate risulta anche

$$\mathfrak{D}^2 = \frac{\det \| b_{\lambda\mu} \|}{\det \| a_{\lambda\mu} \|}, \tag{2,5}$$

di modo che [cfr. (2.3)] $\mathfrak{D}$ può anche intendersi espresso in funzione delle $\gamma_{\lambda\mu}$. Anzi, conviene subito osservare che, essendo $\mathfrak{D}$ invariante, può in ogni caso esser pensato funzione delle sole Γ.

3. Siano $\boldsymbol{T}_h$ ($h = 1, 2, 3$) gli sforzi relativi agli assi in un punto P di C. Con riferimento alle coordinate generali z^λ pongo

$$\boldsymbol{t}^\lambda = \frac{\partial z^\lambda}{\partial x_h} \boldsymbol{T}_h \text{ (4)}. \tag{3,1}$$

I vettori $\boldsymbol{t}^\lambda$ costituiscono un sistema di vettori controvarianti, e si può perciò porre

$$\boldsymbol{t}^\lambda = t^{\lambda\mu} \frac{\partial P}{\partial z^\mu}. \tag{3,2}$$

Dirò tensore degli sforzi il tensore di componenti controvarianti $t^{\lambda\mu}$. La seconda equazione cardinale implica che esso sia simmetrico. Si può inoltre osservare che quando le z^λ coincidano con le x_h, le $t^{\lambda\mu}$ si identificano con le ordinarie caratteristiche euleriane di tensione T_{hk}, mentre quando si facciano coincidere le z^λ con le y_h, le t^{hk} corrispondenti vengono a differire dalle caratteristiche lagrangiane di tensione Y_{hk} (5) solo per il fattore $1/\mathfrak{D}$.

Converrà anche qui talvolta ricorrere a notazioni ad un solo indice ponendo

$$t^{\lambda\lambda} = t^\lambda, \quad t^{\lambda+1\ \lambda+2} = t^{\lambda+3}, \qquad (\lambda = 1, 2, 3). \tag{3,3}$$

4. In ogni trasformazione reversibile di solidi incomprimibili, il potenziale termodinamico $\mathcal{F}$ deve intendersi, per ogni particella,

(4) Naturalmente adotto la convenzione della somma.

(5) Cfr. A. SIGNORINI, luogo cit., Cap. II, n. 4.

funzione soltanto della temperatura e delle sei componenti di deformazione $\gamma_{\lambda\mu}$ legate dalla condizione di incomprimibilità

$$(4{,}1) \qquad \mathfrak{D}(\gamma) = f(T,\ T_*\,;\ P_*) \quad , \quad f(T_*,\ T_*\,;\ P_*) = 1 \ \text{(6)}.$$

Con riferimento ad una determinata particella P_*, ed ad uno stato $\mathcal{H}_1$ di S cui corrisponda la configurazione C, fisso l'attenzione sulla terna principale di deformazione $\mathcal{C}_\gamma$, ed introduco tre parametri φ_h $(h = 1, 2, 3)$ con la sola condizione che complessivamente individuino la posizione di $\mathcal{C}_\gamma$ rispetto a $\mathcal{C}$. Con ciò, $\mathcal{F}$ può intendersi espressa in funzione delle Γ_k e delle φ_h, e mi propongo qui di stabilire le relazioni che esprimono le componenti dello stress rispetto a $\mathcal{C}_\gamma$ in funzione delle Γ e delle φ.

A questo scopo, indico intanto con $\mathcal{F}_\Gamma$ ciò che diviene $\mathcal{F}(\gamma \mid T;\ P_*)$ quando ciascuna delle $\gamma_{\lambda\mu}$ venga espressa in funzione delle Γ_h e delle φ_h. Poi penso ad una trasformazione che, iniziantesi da C_*, dipenda regolarmente da un parametro $\Im$, nel senso che tanto lo spostamento che la temperatura debbano intendersi funzioni regolari di $\Im$ (naturalmente legate dal vincolo di incomprimibilità (4,1)) senza escludere che T possa ridursi ad una costante. Convengo anche che allo stato di S in C_* corrisponda il valore $\Im = 0$, mentre indico con $\Im_1$ il valore di $\Im$ corrispondente allo stato $\mathcal{H}_1$.

In relazione ad una prescelta particella P_*, ed in corrispondenza ad un generico valore di $\Im$ tra 0 e $\Im_1$, siano $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ i versori di $\mathcal{C}_\gamma$. Ponendo

$$(4{,}2) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{i}_k}{\partial \Im} = \omega \wedge \boldsymbol{i}_k, \qquad (k = 1, 2, 3),$$

che implicano

$$(4{,}3) \qquad 2\omega = \sum_l^{1\ldots3} \boldsymbol{i}_l \wedge \frac{\partial \boldsymbol{i}_l}{\partial \Im},$$

ω resta individuata dalle sole $\varphi(\Im)$. In analogia a (4,3), pongo anche

$$(4{,}4) \qquad 2\omega_k = \sum_l^{1\ldots3} \boldsymbol{i}_l \wedge \frac{\partial \boldsymbol{i}_l}{\partial \varphi_k},$$

e intendo

$$(4{,}5) \qquad \omega_h = \omega \times \boldsymbol{i}_h \quad , \quad \omega_{kh} = \omega_k \times \boldsymbol{i}_h, \qquad (h = 1, 2, 3).$$

(6) Cfr. A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, « Mem. 3ª, Ann. Mat. pura e appl. », (4), T. XXXIX (1955), pp. 147-201, Cap. I, n. 1.

Evidentemente è

$$\omega = \sum_{k}^{1\dots3} \omega_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \Im}. \tag{4,6}$$

Ciò premesso, arriverò a mostrare che per le componenti t^{hk} degli sforzi rispetto a $\mathscr{C}_\lambda$ sussistono le relazioni

$$\rho \frac{\partial \mathscr{F}_\Gamma}{\partial \Gamma_h} = -t^h + q \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \Gamma_h} \quad ; \quad \rho \frac{\partial \mathscr{F}_\Gamma}{\partial \varphi_h} = -\sum_{l}^{1\dots3} 2 t^{l+3} \omega_{hl} (\Gamma_{l+1} - \Gamma_{l+2}),$$

in cui ρ indica la densità di S nello stato $\mathscr{K}_1$.

5. Comincio col ricordare che, per ogni solido incomprimibile a trasformazioni reversibili i principi della termodinamica classica, uniti alla condizione di incomprimibilità, implicano che le t^λ restino espresse da relazioni del tipo

$$t^\lambda = -\rho \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \gamma_\lambda} + p \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \gamma_\lambda}, \qquad (\lambda = 1, 2 \dots 6), \tag{5,1}$$

nelle quali p è uno scalare che rappresenta da solo le reazioni interne dovute al vincolo di incomprimibilità (7).

Vale d'altra parte, l'identità [cfr. n. prec.]

$$\mathscr{F}_\Gamma(\Gamma \mid \varphi \mid T;\ P_*) \equiv \mathscr{F}(\gamma \mid T;\ P_*) \tag{5,2}$$

dalla quale si ottiene, sempre per P_* e per un qualunque valore di $\Im$,

$$\sum_{h}^{1\dots3} \left\{ \frac{\partial \mathscr{F}_\Gamma}{\partial \Gamma_h} \frac{\partial \Gamma_h}{\partial \Im} + \frac{\partial \mathscr{F}_\Gamma}{\partial \varphi_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \Im} \right\} = \sum_{\lambda}^{1\dots6} \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \gamma_\lambda} \frac{\partial \gamma_\lambda}{\partial \Im}. \tag{5,3}$$

L'intervento della (5,1) permette di scrivere quest'ultima nella forma

$$\rho \sum_{h}^{1\dots6} \left\{ \frac{\partial \mathscr{F}_\Gamma}{\partial \Gamma_h} \frac{\partial \Gamma_h}{\partial \Im} + \frac{\partial \mathscr{F}_\Gamma}{\partial \varphi_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \Im} \right\} = -\sum_{\lambda}^{1\dots6} \left(t^\lambda - p \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \gamma_\lambda} \right) \frac{\partial \gamma_\lambda}{\partial \Im}$$

e cioè

$$\rho \sum_{h}^{1\dots6} \left\{ \frac{\partial \mathscr{F}_\Gamma}{\partial \Gamma_h} \frac{\partial \Gamma_h}{\partial \Im} + \frac{\partial \mathscr{F}_\Gamma}{\partial \varphi_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \Im} \right\} = p \frac{d \mathfrak{D}}{d \Im} - \sum_{\lambda}^{1\dots6} t^\lambda \frac{\partial \gamma_\lambda}{\partial \Im}. \tag{5,4}$$

(7) Facendo coincidere le z^λ con le y_h le (5, 1) si trasformano nelle relazioni: $Y_h = -\rho_* \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \varepsilon_h} + p \mathfrak{D} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \varepsilon_h}$, ($\rho_*$ densità nello stato di riferimento) stabilite dal prof. SIGNORINI, cfr. luogo cit. in (6).

Conviene a questo punto introdurre l'omografia γ corrispondente al tensore doppio simmetrico $\gamma_{\lambda\mu}$. Insieme indico con $\boldsymbol{a}_\lambda = \frac{\partial P_*}{\partial z^\lambda}$ i vettori fondamentali covarianti nella configurazione di riferimento. Con ciò, avendosi

$$\gamma \boldsymbol{a}_\lambda = \gamma_{\lambda\mu} \boldsymbol{a}^\mu \quad , \quad \gamma_{\lambda\mu} = \boldsymbol{a}_\mu \times \gamma \boldsymbol{a}_\lambda$$

si può subito scrivere

$$(5,5) \qquad \sum_\lambda^{1\dots 6} t^\lambda \frac{\partial \gamma_\lambda}{\partial \Im} = \sum_\lambda^{1\dots 3} t^\lambda \boldsymbol{a}_\lambda \times \frac{\partial \gamma}{\partial \Im} \boldsymbol{a}_\lambda + 2 \sum_\lambda^{1\dots 3} t^{\lambda+3} \boldsymbol{a}_{\lambda+1} \times \frac{\partial \gamma}{\partial \Im} \boldsymbol{a}_{\lambda+2} \,.$$

Tenendo poi conto delle identità, valide per ogni $\Im$

$$(5,6) \qquad \Gamma_h = \boldsymbol{i}_h \times \gamma \boldsymbol{i}_h \quad , \quad 0 = \boldsymbol{i}_{h+1} \times \gamma \boldsymbol{i}_{h+2} \qquad (h = 1, 2, 3)$$

si ottiene

$$(5,7) \qquad \boldsymbol{i}_h \times \frac{\partial \gamma}{\partial \Im} \boldsymbol{i}_h = \frac{\partial \Gamma_h}{\partial \Im} ,$$

$$\boldsymbol{i}_{h+1} \times \frac{\partial \gamma}{\partial \Im} \boldsymbol{i}_{h+2} = - \frac{\partial \boldsymbol{i}_{h+1}}{\partial \Im} \times \gamma \boldsymbol{i}_{h+2} - \boldsymbol{i}_{h+1} \times \gamma \frac{\partial \boldsymbol{i}_{h+2}}{\partial \Im} ,$$

mentre l'intervento della (4,2) permette di scrivere quest'ultima nella forma

$$(5,8) \qquad \boldsymbol{i}_{h+1} \times \frac{\partial \gamma}{\partial \Im} \boldsymbol{i}_{h+2} = \omega_h (\Gamma_{h+1} - \Gamma_{h+2}) , \qquad (h = 1, 2, 3).$$

6. Si identifichino nella (5,5) i vettori $\boldsymbol{a}_\lambda$ coi versori della terna principale di deformazione relativa a P_* ed al valore $\Im_1$ di $\Im$. In tal modo, intanto le $t^{\lambda\mu}$ vengono ad assumere il significato di componenti t^{hk} degli sforzi rispetto a $\mathscr{C}_\gamma$. Tenendo poi presente che $\mathfrak{D}$ si può intendere espressa in funzione delle Γ_h, di modo che è

$$\frac{d\mathfrak{D}}{d\Im} = \sum_h^{1\dots 3} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \Gamma_h} \frac{\partial \Gamma_h}{\partial \Im}$$

si può scrivere la (5,4), per $\Im = \Im_1$, nella forma

$$(6,1) \qquad \sum_h^{1\dots 3} \left\{ \left(\rho \frac{\partial \mathscr{F}_\Gamma}{\partial \Gamma_h} - p \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \Gamma_h} \right) \frac{\partial \Gamma_h}{\partial \Im} + \frac{\partial \mathscr{F}_\Gamma}{\partial \varphi_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \Im} \right\} =$$

$$= - \sum_h^{1\dots 3} t^h \frac{\partial \Gamma_h}{\partial \Im} - 2 \sum_h^{1\dots 3} t^{h+3} \omega_h (\Gamma_{h+1} - \Gamma_{h+2}).$$

Si osservi ora che la condizione di incomprimibilità non implica alcun vincolo per le φ, nè alcun legame tra esse e le Γ. Facendo allora coincidere $\Im$ con una delle φ, φ_k, si ottiene intanto

$$\rho \frac{\partial \mathcal{F}_\Gamma}{\partial \varphi_k} = 2 \sum_h^{1..3} t^{h+3} \omega_{kh} (\Gamma_{h+1} - \Gamma_{h+2}) \tag{6,2}$$

con [cfr. (4,5)]

$$2\omega_{kh} = \boldsymbol{i}_{h+2} \times \frac{\partial \boldsymbol{i}_{h+1}}{\partial \varphi_k} - \boldsymbol{i}_{h+1} \times \frac{\partial \boldsymbol{i}_{h+2}}{\partial \varphi_k},$$

che costituiscono un primo gruppo delle relazioni cercate [cfr. (4,7)].

Le (6,2) permettono intanto di ridurre la (6,1) [cfr. (4,1)] a

$$\sum_h^{1...3} \left(\rho \frac{\partial \mathcal{F}_\Gamma}{\partial \Gamma_h} - p \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \Gamma_h} \right) \frac{\partial \Gamma_h}{\partial \Im} = - \sum_h^{1...3} t^h \frac{\partial \Gamma_h}{\partial \Im} \tag{6,4}$$

da intendersi valida subordinatamente alla condizione [cfr. (4,1)]

$$\sum_h^{1...3} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \Gamma_h} \frac{\partial \Gamma_h}{\partial \Im} - \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \Im} = 0. \tag{6,5}$$

Se il solido non è cinematicamente indifferente alle variazioni di temperatura ($\partial f / \partial T$ generalmente non nulla) e la trasformazione non è isoterma ($\partial T / \partial \Im \neq 0$), in quanto la (4,1) non fa altro che far corrispondere ad ogni terna di valori possibili delle Γ un valore di T, le Γ si possono interpretare come variabili indipendenti, di modo che, indicando con q_a ciò che diviene p nel caso presente, dalla (6,4) si ottiene

$$t^h = - \rho \frac{\partial \mathcal{F}_\Gamma}{\partial \Gamma_h} + q_a \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \Gamma_h}, \qquad (h = 1, 2, 3). \tag{6,6}$$

In caso contrario, la (6,5) viene a costituire un effettivo vincolo per le Γ. Indicando allora con p_1 un ulteriore moltiplicatore, le (6,4) e (6,5) si possono sostituire con

$$\sum_h^{1...3} \left\{ \rho \frac{\partial \mathcal{F}_\Gamma}{\partial \Gamma_h} - (p + p_1) \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \Gamma_\Gamma} + t^h \right\} \frac{\partial \Gamma_h}{\partial \Im} = 0$$

la quale implica

$$t^h = - \rho \frac{\partial \mathcal{F}_\Gamma}{\partial \Gamma_h} + q_\tau \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \Gamma_h}, \quad q_\tau = p + p_1, \qquad (h = 1, 2, 3) \tag{6,7}$$

cioè ancora una relazione del tipo $(4,7)_1$.

Stante la assoluta arbitrarietà della scelta di P_* e dello stato $\mathcal{H}_1$ tra tutti quelli possibili per ogni trasformazione reversibile di S che si inizi da C_*, le (6,6) e (6,7) rappresentano in ogni caso le relazioni cercate [8],

7. Se S è isotropo in C_*, $\mathcal{T}$ non dipende dalla deformazione che per il tramite degli invarianti principali di deformazione. Le (4,7) permettono allora subito di dimostrare che *condizione necessaria e sufficiente perchè* S *sia isotropo in* C_* *è che la terna principale di deformazione e quella di tensione* (nel senso più generale qui adottato) *coincidano.*

Se infatti $\mathcal{T}_\Gamma$ è indipendente dalle φ, $(4,7)_2$ implicano che sia

$$(7,1) \qquad \sum_h^{1\ldots 3} t^{h+3}\omega_{hk}(\Gamma_{h+1}-\Gamma_{h+2})=0, \qquad (h=1,2,3)$$

le quali, potendosi intendere le ω_{kh} affatto arbitrarie e le $\Gamma_{h+1}-\Gamma_{h+2}$ — non nulle, portano $t^{h+3}=0$ $(h=1,2,3)$ e quindi che $\mathcal{C}_\gamma$ sia anche terna principale di tensione. Viceversa, se tutte le t^{h+3} $(h=1,2,3)$ sono nulle, $\mathcal{T}_\Gamma$ risulta indipendente dalle φ, e perciò funzione solo (della temperatura) e delle Γ, quindi degli invarianti principali di deformazione.

Non è forse inutile rimarcare che, quando si facciano coincidere le z^λ con le y_h, la condizione ora stabilita equivale a quella che coincidano la terna principale di deformazione diretta con l'immagine, in C_*, della terna principale di tensione (terna principale del tensore lagrangiano degli sforzi). Quando invece si facciano coincidano le z^λ con le x_h, si ottiene la condizione che l'attuale terna principale di tensione coincida con quella relativa alla deformazione inversa. Condizioni queste da tempo ben note, almeno come necessarie.

OSSERVAZIONE. - In quanto nella dimostrazione interviene solo il secondo gruppo delle relazioni (4,7), la condizione trovata viene ad essere necessaria e sufficiente per l'isotropia di S in C_* anche se il solido è comprimibile.

[8] Forse conviene sottolineare il fatto che le (4, 7) come le analoghe (5, 1), non implicano alcuna restrizione sulla scelta dello stato di riferimento.