Bollettino
Unione Matematica Italiana

Tino Zeuli

Perturbazione di onde elettromagnetiche guidate di tipo TEM entro un cavo cilindrico circolare, dovuta a piccole eterogeneità del dielettrico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.1, p. 22–33.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_1_22_0>

Perturbazione di onde elettromagnetiche guidate di tipo TEM entro un cavo cilindrico circolare, dovuta a piccole eterogeneità del dielettrico.

Nota di TINO ZEULI (a Torino)

Sunto. - *Si studiano le perturbazioni di onde elettromagnetiche guidate di tipo TEM entro un cavo cilindrico circolare, dovute a piccole eterogeneità del dielettrico, determinando in modo completo le componenti perturbate del campo elettrico e del campo magnetico.*

1. È noto come onde elettromagnetiche di tipo TEM, cioè con campo elettrico e campo magnetico entrambi trasversali, si possano propagare in un cavo cilindrico circolare, con pareti metalliche perfettamente conduttrici e ripieno di dielettrico omogeneo e isotropo.

Precisamente, se ε_0 è il valore della costante dielettrica che riempie il cavo, μ la permeabilità magnetica, entrambe costanti, se ci serviamo di coordinate cilindriche r, θ, z, aventi per asse l'asse del cavo e sono $\vec{\rho}$, $\vec{\tau}$, $\vec{k}$ i versori tangenti alle linee coordinate, si ha la soluzione delle equazioni di MAXWELL

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_0\, e^{i(\omega t - \beta_0 z)} \quad , \qquad \text{con} \quad \vec{H}_0 = C_0 \vec{\tau}/r \quad , \\ \vec{E} &= \vec{E}_0\, e^{i(\omega t - \beta_0 z)} \quad , \qquad \text{con} \quad \vec{E}_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon_0}\, C_0 \vec{\rho}/r \quad , \end{aligned} \tag{1}$$

dove C_0 è una costante (complessa) arbitraria, ω è un valore arbitrario della pulsazione, mentre la costante di fase β_0 è legata alla velocità di fase, V_0, dalla relazione

$$\beta_0 = \omega / V_0 \, , \tag{2}$$

essendo

$$V_0 = c/\sqrt{\mu\varepsilon_0} \, , \tag{3}$$

e quindi

$$\beta_0 = \omega \sqrt{\mu\varepsilon_0}/c \, . \tag{2'}$$

La soluzione espressa dalle (1) soddisfa ovviamente alla condizione di ortogonalità del campo elettrico alle pareti del cavo.

Ciò premesso mi propongo in questa nota di studiare la perturbazione che subisce la soluzione (1) per effetto di una leggera eterogeneità del dielettrico che riempie il cavo.

Questo problema è già stato preso in esame dal Prof. L. CAPRIOLI [1] che, dopo aver determinata, per una guida d'onda a sezione generica, la variazione della costante di fase, nel calcolo del campo e. m. perturbato si è limitato al caso, pure interessante, di un cavo circolare in cui la costante dielettrica ε è funzione della sola distanza r, dall'asse del cavo; considero qui, con diverso metodo, il caso, generale, di dissimetria rispetto all'asse supponendo che sia

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(r, \theta), \tag{4}$$

dove ε_0 è il valore medio di ε in tutta la sezione del tubo, ed $\varepsilon_1(r, \theta)$ una funzione di r e θ, infinitesima con le sue derivate, e tale da poter trascurare i termini di ordine superiore al primo.

2. Delle equazioni di MAXWELL

$$\text{(5)} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad \text{(6)} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

cerchiamo ora delle soluzioni della forma

$$\text{(7)} \quad \vec{H} = (\vec{H}_0 + \vec{h})\, e^{i(\omega t - \beta z)}, \qquad \text{(8)} \quad \vec{E} = (\vec{E}_0 + \vec{e})\, e^{i(\omega t - \beta z)},$$

dove $\vec{h}$ ed $\vec{e}$ sono funzioni di r e θ soltanto e dello stesso ordine di grandezza di ε_1, e nelle quali la costante di fase avrà subito un incremento infinitesimo che indichiamo con β_1, avendosi cioè

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 . \tag{9}$$

Sostituendo nelle equazioni (5) e (6) e trascurando i termini di ordine superiore al primo rispetto alle quantità $\vec{h}$, $\vec{e}$, ε_1 e β_1, essendo in tale approssimazione, ad es.,

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \{ \operatorname{rot} (\vec{H}_0 + \vec{h}) - i \vec{k} \wedge [(\beta_0 + \beta_1) \vec{H}_0 + \beta_0 \vec{h}] \}\, e^{i(\omega t - \beta z)},$$

[1] L. CAPRIOLI, *Sul comportamento dei modi TEM nei cavi coassiali in presenza di lieve eterogeneità del dielettrico*, « Rendic. del Seminario Matematico dell'Università di Padova », vol. XXII, a. 1953. Di analoga questione si è pure occupata la Dott.ssa M. DE SOCIO nel lavoro: *Sulla propagazione nelle guide con dielettrico eterogeneo*, « Rivista di Matematica della Università di Parma », vol. V, a. 1954.

ed analoga formula valendo per rot $\overrightarrow{E}$, si ottengono le equazioni

$$\text{rot}\,\overrightarrow{h} + i\beta_1 \frac{C_0}{r}\overrightarrow{\rho} - i\beta_0 \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{h} = i\frac{\omega}{c}(\varepsilon_1 \overrightarrow{E_0} + \varepsilon_0 \overrightarrow{e}), \tag{10}$$

$$\text{rot}\,\overrightarrow{e} - i\beta_1 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\frac{C_0}{r}\overrightarrow{\tau} - i\beta_0 \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{e} = -i\frac{\omega\mu}{c}\overrightarrow{h}, \tag{11}$$

e queste, se h_r, h_θ, h_z, e_r, e_θ, e_z, sono le componenti di $\overrightarrow{h}$ ed $\overrightarrow{e}$ nel sistema di coordinate cilindriche considerate, porgono subito i due sistemi:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{\partial h_z}{\partial \theta} + i\beta_0 h_\theta - \frac{i\omega\varepsilon_0}{c} e_r = \frac{iC_0}{r}\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\varepsilon_1 - \beta_1\right), \\ &i\beta_0 h_r + \frac{\partial h_z}{\partial r} + \frac{i\omega\varepsilon_0}{c} e_\theta = 0, \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r h_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial h_r}{\partial \theta} - \frac{i\omega\varepsilon_0}{c} e_z = 0, \end{aligned}\right. \tag{10'}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{\partial e_z}{\partial \theta} + i\beta_0 e_\theta + \frac{i\omega\mu}{c} h_r = 0, \\ &i\beta_0 e_r + \frac{\partial e_z}{\partial r} - \frac{i\omega\mu}{c} h_\theta = -i\beta_1\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\frac{C_0}{r}, \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r e_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial e_r}{\partial \theta} + \frac{i\omega\mu}{c} h_z = 0. \end{aligned}\right. \tag{11'}$$

Dalla seconda delle (10') e dalla prima delle (11'), ricordando il valore (2') di β_0, si ricava:

$$\frac{i\omega}{c}(\mu h_r + \sqrt{\mu\varepsilon_0}\, e_\theta) = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\frac{\partial h_z}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial e_z}{\partial \theta} \tag{12}$$

e quindi

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\frac{\partial h_z}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial e_z}{\partial \theta} = 0. \tag{13}$$

Così pure dalla prima delle (10') e dalla seconda delle (11') si ha

$$\begin{aligned} &\frac{i\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon_0}\left(h_\theta - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}e_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial h_z}{\partial \theta} = \frac{iC_0}{r}\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\varepsilon_1 - \beta_1\right), \\ &-\frac{i\mu\omega}{c}\left(h_\theta - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}e_r\right) + \frac{\partial e_z}{\partial r} = -\frac{iC_0}{r}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\beta_1, \end{aligned} \tag{14}$$

e da queste si ottiene:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial h_z}{\partial \theta} + \frac{\partial e_z}{\partial r} = \frac{iC_0}{r}\left(\frac{\omega\mu}{c\varepsilon_0}\varepsilon_1 - 2\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\beta_1\right). \tag{15}$$

Le (13) e (15) costituiscono un sistema di due equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine, non omogeneo, nelle due sole funzioni incognite h_z, e_z.

3. Per determinare le due funzioni h_z, e_z, supponiamo la $\varepsilon_1(r, \theta)$ rappresentabile mediante una serie di FOURIER della forma

$$\varepsilon_1(r, \theta) = \varepsilon_{10}(r) + \sum_1 {}_n \left[\varepsilon_{1n}(r) \cos n\theta + \overset{*}{\varepsilon}_{1n}(r) \operatorname{sen} n\theta\right], \tag{16}$$

dove le $\varepsilon_{10}(r)$, $\varepsilon_{1n}(r)$, $\overset{*}{\varepsilon}_{1n}(r)$ sono da ritenere funzioni note di r per $a \leq r \leq b$, essendo a, b i raggi interno ed esterno del cavo. Supporremo pertanto che anche le funzioni incognite h_z, e_z siano rappresentabili mediante serie di FOURIER uniformemente convergenti della forma

$$\begin{aligned} h_z &= h_{z0}(r) + \sum_1 {}_n \left[h_{zn}(r) \cos n\theta + \overset{*}{h}_{zn}(r) \operatorname{sen} n\theta\right], \\ e_z &= e_{z0}(r) + \sum_1 {}_n \left[e_{zn}(r) \cos n\theta + \overset{*}{e}_{zn}(r) \operatorname{sen} n\theta\right], \end{aligned} \tag{17}$$

le quali, quando il secondo membro della (16) si riduce ad un numero finito di termini, si ridurranno anche al corrispondente numero finito di termini.

Sostituendo formalmente nelle equazioni (13) e (15), si deducono le nuove equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dh_{z0}}{dr} = 0, \\ &\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\,\frac{dh_{z0}}{dr} - \frac{n}{r}\,\overset{*}{e}_{zn} = 0, \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots), \\ &\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\,\frac{d\overset{*}{h}_{zn}}{dr} + \frac{n}{r}\,e_{zn} = 0, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{de_{z0}}{dr} = \dfrac{iC_0}{r}\left[\dfrac{\omega\mu}{c\varepsilon_0}\varepsilon_{10}(r) - 2\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_0}}\beta_1\right], \\[2ex] \dfrac{de_{zn}}{dr} + n\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_0}}\,\dfrac{1}{r}\,h^*_{zn} = \dfrac{iC_0}{r}\,\dfrac{\omega\mu}{c\varepsilon_0}\,\varepsilon_{1n}(r), \\[2ex] \dfrac{de^*_{zn}}{dr} - n\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_0}}\,\dfrac{1}{r}\,h_{zn} = \dfrac{iC_0}{r}\,\dfrac{\omega\mu}{c\varepsilon_0}\,\varepsilon^*_{1n}(r), \end{cases}$$

$$(n = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

La prima delle (18) e la prima delle (19) porgono subito

$$(20)\qquad h_{z0} = \text{cost.}\ ,\quad e_{z0} = -2iC_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\log r + iC_0\frac{\omega\mu}{c\varepsilon_0}\int_a^r \frac{\varepsilon_{10}}{r}\,dr + A_0,$$

con A_0 costante d'integrazione. Anzi, tenendo presente che il flusso di $\overrightarrow{H}$ attraverso la sezione del cavo è nullo perchè, per la (6), è uguale alla circuitazione di $\overrightarrow{E}$ sul contorno s della sezione (circuitazione nulla essendo $\overrightarrow{E}$ normale ad s, dato che i conduttori che delimitano il cavo sono perfetti) segue senz'altro:

$$(20')\qquad h_{z0} = 0.$$

Eliminando dalle rimanenti equazioni e_{zn}, e^*_{zn}. si ha

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dh_{zn}}{dr}\right) - \dfrac{n^2}{r}h_{zn} = \dfrac{iC_0 n}{r}\,\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_0}}\,\varepsilon^*_{1n}(r), \\[2ex] \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dh^*_{zn}}{dr}\right) - \dfrac{n^2}{r}h^*_{zn} = -\dfrac{iC_0 n}{r}\,\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_0}}\,\varepsilon_{1n}(r), \end{cases}$$

dalle quali si ricava

$$(21)\qquad \begin{cases} h_{zn} = A_n r^n + A'_n r^{-n} + \\[1ex] \quad + \dfrac{iC_0}{2}\,\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_0}}\left[r^n\displaystyle\int_a^r r^{-n-1}\varepsilon^*_{1n}(r)dr - r^{-n}\int_a^r r^{n-1}\varepsilon^*_{1n}(r)dr\right], \\[2ex] h^*_{zn} = B_n r^n + B'_n r^{-n} - \\[1ex] \quad - \dfrac{iC_0}{2}\,\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_0}}\left[r^n\displaystyle\int_a^r r^{-n-1}\varepsilon_{1n}(r)dr - r^{-n}\int_a^r r^{n-1}\varepsilon_{1n}(r)dr\right], \end{cases}$$

$$(n = 1,\ 2,\ 3, \ldots),$$

dove le A_n, A'_n, B_n, B'_n sono costanti arbitrarie. Conseguentemente dalle ultime due delle (18) si deduce

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} e^*_{zn} &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\Big\{A_n r^n - A'_n r^{-n} + \\ &+ \frac{iC_0}{2}\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left[r^n\int_a^r r^{-n-1}\varepsilon^*_{1n}(r)dr + r^{-n}\int_a^r r^{n-1}\varepsilon^*_{1n}(r)dr\right]\Big\}, \\ e_{zn} &= -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\Big\{B_n r^n - B'_n r^{-n} - \\ &- \frac{iC_0}{2}\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left[r^n\int_a^r r^{-n-1}\varepsilon_{1n}(r)dr + r^{-n}\int_a^r r^{n-1}\varepsilon_{1n}(r)dr\right]\Big\}, \end{aligned}\right.$$

$$(n = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

Teniamo ora conto del fatto che sulle pareti metalliche del cavo il campo elettrico sarà normale, e quindi dovrà essere

$$(23)\qquad e_{z0} = 0, \quad e_{zn} = 0, \quad e^*_{zn} = 0, \quad \text{per} \quad r = a, \quad \text{e per} \quad r = b.$$

Imponendo la prima di queste condizioni, dalla seconda delle (20) si ha intanto

$$-2iC_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\beta_1 \log a + A_0 = 0,$$

$$-2iC_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\beta_1 \log b + iC_0\frac{\omega\mu}{c\varepsilon_0}\int_a^b \frac{\varepsilon_{10}}{r}dr + A_0 = 0,$$

dalle quali si ricava

$$(24)\quad \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\int_a^b \frac{\varepsilon_{10}(r)}{r}dr\Big/(\log b - \log a), \\ A_0 &= 2iC_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\beta_1 \log a, \end{aligned}$$

la prima delle quali mostra che *l'incremento* β_1 *della costante di fase dipende solo dalla eterogeneità radiale del dielettrico che riempie il cavo e non da quella trasversale*. come si sarebbe potuto rilevare, in generale, dall'espressione di β_1 data dal Prof. CAPRIOLI nel lavoro citato [n. 3, (14)] notando che in essa $|E_c|^2$ dipende solo da r. Se, poi, nella (24) si applica all'integrale a 2° membro il teorema del valor medio e si indica con $\bar{\varepsilon}_{10}$ un opportuno valore di ε_{10} nell'intervallo (a, b), si ottiene per β_1 l'espressione

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\,\bar{\varepsilon}_{10}\,,$$

in accordo col risultato rilevato dal Prof. CAPRIOLI nella nota 9 del lavoro citato.

Analogamente le rimanenti condizioni (23) porgono

$$A_n a^n - A'_n\, a^{-n} = 0,$$

$$A_n b^n - A'_n b^{-n} + \frac{iC_0}{2}\,\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left[b^n\int_a^b r^{-n-1}\,\overset{*}{\varepsilon}_{1n}(r)dr + b^{-n}\int_a^b r^{n-1}\overset{*}{\varepsilon}_{1n}(r)dr\right] = 0,$$

$$B_n a^n - B'_n\, a^{-n} = 0,$$

$$B_n b^n - B'_n b^{-n} - \frac{iC^0}{2}\,\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left[b^n\int_a^b r^{-n-1}\,\varepsilon_{1n}(r)dr + b^{-n}\int_a^b r^{n-1}\,\varepsilon_{1n}(r)dr\right] = 0,$$

e da questa si ricavano i valori delle costanti A_n, A'_n, B_n, B'_n:

$$A_n = \frac{iC_0}{2}\,\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left[b^{2n}\int_a^b r^{-n-1}\,\overset{*}{\varepsilon}_{1n}dr + \int_a^b r^{n-1}\,\overset{*}{\varepsilon}_{1n}dr\right]\Big/(a^{2n} - b^{2n}),$$

$$A'_n = \frac{iC_0}{2}\,\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left[\int_a^b r^{-n-1}\,\overset{*}{\varepsilon}_{1n}dr + b^{-2n}\int_a^b r^{n-1}\,\overset{*}{\varepsilon}_{1n}dr\right]\Big/(b^{-2n} - a^{-2n}),$$

$$B_n = \frac{iC_0}{2}\,\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left[b^{2n}\int_a^b r^{-n-1}\,\varepsilon_{1n}\,dr + \int_a^b r^{n-1}\,\varepsilon_{1n}\,dr\right]\Big/(b^{2n} - a^{2n}).$$

$$B'_n = \frac{iC_0}{2}\,\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left[\int_a^b r^{-n-1}\,\varepsilon_{1n}\,dr + b^{-2n}\int_a^b r^{n-1}\,\varepsilon_{1n}dr\right]\Big/(a^{-2n} - b^{-2n}).$$

Le funzioni h_{zn}, $\overset{*}{h}_{zn}$, e_{zn}, $\overset{*}{e}_{zn}$ risultano così completamente determinate.

4. Per ricavare ora le rimanenti funzioni incognite osserviamo che dalla prima delle (12) e dalla seconda delle (14) si ricava

$$h_r = \frac{ic}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon_0}}\frac{\partial h_z}{\partial r} - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}\, e_\theta\,, \tag{25}$$

$$h_\theta = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}\, e_r - \frac{ic}{\mu\omega}\left(\frac{\partial e_z}{\partial r} + \frac{iC_0}{r}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\,\beta_1\right). \tag{26}$$

Sostituendo nella terza delle (10′), dopo facili trasformazioni e semplificazioni, tenendo conto della (15), si ottiene:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(re_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = \frac{i\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon_0}\, e_z - \frac{C_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial r} \tag{27}$$

ed associando a questa la terza delle (11′), che così scriviamo

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(re_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = -\frac{i\omega\mu}{c}h_z, \tag{28}$$

si ha che il sistema (27), (28) contiene solo le incognite e_r, e_θ, essendo note e_z ed h_z.

Derivando ambo i membri della (27) rispetto a θ, e tenendo conto della (28), si può eliminare la e_r; avendo riguardo alla (13) si ricava così la seguente equazione differenziale del 2° ordine nella sola funzione incognita e_θ:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}(re_\theta)\right] + \frac{\partial^2 e_\theta}{\partial \theta^2} = -\frac{2i\omega\mu}{c}rh_z - \frac{C_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial r\partial \theta}. \tag{29}$$

Tenendo conto degli sviluppi (16) e (17), e ponendo ancora

$$e_\theta = e_{\theta 0}(r) + \Sigma_n\,[e_{\theta n}(r)\cos n\theta + e^*_{\theta n}(r)\,\mathrm{sen}\, n\theta], \tag{30}$$

dalla (29) si deducono per le funzioni $e_{\theta 0}$, $e_{\theta n}$, $e^*_{\theta n}$, le equazioni

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}(re_{\theta 0})\right] = 0,$$

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}(re_{\theta n})\right] - n^2 e_{\theta n} = -\frac{2i\omega\mu}{c}rh_{zn} - \frac{C_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\, n\frac{d\varepsilon^*_{1r}}{dr}, \tag{31}$$

$$\frac{d}{dr}\left[r\frac{d}{dr}(re^*_{\theta n})\right] - n^2 e^*_{\theta n} = -\frac{2i\omega\mu}{c}rh^*_{zn} + \frac{C_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\, n\frac{d\varepsilon_{1n}}{dr},$$

$$(n = 1,\ 2,\ 3, \ldots),$$

i cui integrali generali sono

$$e_{\theta 0} = \frac{\alpha_0}{r} \log r + \frac{\alpha'_0}{r}, \tag{32}$$

$$\left\{\begin{aligned} e_{\theta n} &= \alpha_n r^{n-1} + \alpha'_n r^{-(n+1)} - \frac{1}{2n}\left\{ r^{n-1}\int_a^r r^{-n}\left(\frac{2i\omega\mu}{c} r h_{zn} + \right.\right. \\ &\quad \left. + \frac{C_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\, n \frac{d\overset{*}{\varepsilon}_{1n}}{dr}\right) dr - r^{-(n+1)}\int_a^r r^n \left(\frac{2i\omega\mu}{c} r h_{zn} + \right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{C_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\, n \frac{d\overset{*}{\varepsilon}_{1n}}{dr}\right) dr \right\}, \\ \overset{*}{e}_{\theta n} &= \beta_n r^{n-1} + \beta'_n r^{-(n+1)} - \frac{1}{2n}\left\{ r^{n-1}\int_a^r r^{-n}\left(\frac{2i\omega\mu}{c} r \overset{*}{h}_{zn} - \right.\right. \\ &\quad \left. - \frac{C_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\, n \frac{d\varepsilon_{1n}}{dr}\right) dr - r^{-(n+1)}\int_a^r r^n \left(\frac{2i\omega\mu}{c} r \overset{*}{h}_{zn} - \right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{C_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\, n \frac{d\varepsilon_{1n}}{dr}\right) dr \right\}, \end{aligned}\right. \tag{33}$$

dove α_θ, α'_0, α_n, α'_n, β_n, β'_n sono costanti arbitrarie.

Con una integrazione per parti si ha pure

$$\left\{\begin{aligned} e_{n\theta} &= \alpha_n r^{n-1} + \alpha'_n r^{-(n+1)} - \frac{i\omega\mu}{cn}\left(r^{n-1}\int_a^r r^{-n+1} h_{zn} dr - \right. \\ &\quad \left. - r^{-(n+1)}\int_a^r r^{n+1} h_{zn} dr\right) - \frac{C_0 n}{2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left(r^{n-1}\int_a^r r^{-(n+1)} \overset{*}{\varepsilon}_{1n} dr + \right. \\ &\quad \left. + r^{-(n+1)}\int_a^r r^{n-1}\overset{*}{\varepsilon}_{1n} dr\right), \\ \overset{*}{e}_{\theta n} &= \beta_n r^{n-1} + \beta'_n r^{-(n+1)} - \frac{i\omega\mu}{cn}\left(r^{n-1}\int_a^r r^{-n+1} \overset{*}{h}_{zn} dr - \right. \\ &\quad \left. - r^{-(n+1)}\int_a^r r^{n+1} \overset{*}{h}_{zn} dr\right) + \frac{C_0 n}{2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left(r^{n-1}\int_a^r r^{-(n+1)} \varepsilon_{1n} dr + \right. \\ &\quad \left. + r^{-(n+1)}\int_a^r r^{n-1}\varepsilon_{1n} dr\right) \end{aligned}\right. \tag{33'}$$

essendo ora α_n, α'_n, β_n, β'_n costanti arbitrarie diverse dalle precedenti.

Sul contorno della sezione retta del cavo deve essere $e_\theta = 0$ e quindi

$$e_{\theta 0} = 0, \qquad e_{\theta n} = 0, \qquad e^*_{\theta n} = 0, \qquad \text{per} \quad r = a \quad \text{ed} \quad r = b.$$

Si hanno pertanto le condizioni

$$\text{(34)} \qquad \begin{aligned} &\alpha_0 \log a + \alpha'_0 = 0, \\ &\alpha_0 \log b + \alpha'_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\text{(35)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_n a^{n-1} + \alpha'_n a^{-(n+1)} = 0, \\ &\alpha_n b^{n-1} + \alpha'_n b^{-(n+1)} - \frac{i\omega\mu}{cn}\left(b^{n-1}\int_a^b r^{-n+1} h_{zn} dr - \right. \\ &\left. - b^{-(n+1)}\int_a^b r^{n+1} h_{zn} dr\right) - \frac{C_0 n}{2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left(b^{n-1}\int_a^b r^{-(n+1)} \varepsilon^*_{1n} dr + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + b^{-(n+1)}\int_a^b r^{n-1} \varepsilon^*_{1n} dr\right) = 0, \\ &\beta_n a^{n-1} + \beta'_n a^{-(n+1)} = 0, \\ &\beta_n b^{n-1} + \beta'_n b^{-(n+1)} - \frac{i\omega\mu}{cn}\left(b^{n-1}\int_a^b r^{-n+1} h^*_{zn} dr - \right. \\ &\left. - b^{-(n+1)}\int_a^b r^{n+1} h^*_{zn} dr\right) + \frac{C_0 n}{2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left(b^{n-1}\int_a^b r^{-(n+1)} \varepsilon_{1n} dr + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + b^{-(n+1)}\int_a^b r^{n-1} \varepsilon_{1n} dr\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Le (34) forniscono subito

$$\alpha_0 = 0 \quad , \quad \alpha'_0 = 0$$

e quindi, per la (32),

$$e_{\theta 0} = 0 \, ;$$

le (35) forniscono i valori delle costanti α_n, α'_n, β_n, β'_n e dopo ciò le funzioni $e_{\theta n}$ e $e^*_{\theta n}$ risultano determinate. I valori di dette costanti sono:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\alpha_n = & \left[\frac{i\omega\mu}{cn}\left(b^{2n}\int_a^b r^{-n+1}h_{zn}dr - \int_a^b r^{n+1}h_{zn}dr\right) + \right. \\
& \left. + \frac{C_0 n}{2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left(b^{2n}\int_a^b r^{-(n+1)}\varepsilon^*_{1n}dr + \int_a^b r^{n-1}\varepsilon^*_{1n}dr\right)\right] \Big/ (b^{2n} - a^{2n}), \\
\alpha'_n = & \left[\frac{i\omega\mu}{cn}\left(\int_a^b r^{-n+1}h_{zn}dr - b^{-2n}\int_a^b r^{n+1}h_{zn}dr\right) + \right. \\
& \left. + \frac{C_0 n}{2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left(\int_a^b r^{-(n+1)}\varepsilon^*_{1n}dr - b^{-2n}\int_a^b r^{n-1}\varepsilon^*_{1n}dr\right)\right] \Big/ (b^{-2n} \quad a^{-2n}), \\
\beta_n = & \left[\frac{i\omega\mu}{cn}\left(b^{2n}\int_a^b r^{-n+1}h^*_{zn}dr - \int_a^b r^{n+1}h^*_{zn}dr\right) - \right. \\
& \left. - \frac{C_0 n}{2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left(b^{2n}\int_a^b r^{-(n+1)}\varepsilon_{1n}dr + \int_a^b r^{n-1}\varepsilon_{1n}dr\right)\right] \Big/ (b^{2n} - a^{2n}), \\
\beta'_n = & \left[\frac{i\omega\mu}{cn}\left(\int_a^b r^{-n+1}h^*_{zn}dr - b^{-2n}\int_a^b r^{n+1}h^*_{zn}dr\right) - \right. \\
& \left. - \frac{C_0 n}{2\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\left(\int_a^b r^{-(n+1)}\varepsilon_{1n}dr - b^{-2n}\int_a^b r^{n-1}\varepsilon_{1n}dr\right)\right] \Big/ (b^{-2n} - a^{-2n}), \\
& \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots).
\end{aligned}
\right.
$$

Dopo di ciò la (25) fornisce senz'altro la componente h_z, che ovviamente è della forma

$$
(36) \qquad h_r = \Sigma_n^{1} (h_{rn} \cos n\theta + h^*_{rn} \operatorname{sen} n\theta).
$$

Per la determinazione della e_r ci si può servire della (28), e posto

$$e_r = e_{r0} + \sum_{1} {}_n [e_{rn}(r) \cos n\theta + \overset{*}{e}_{rn}(r) \operatorname{sen} n\theta], \tag{37}$$

si ricava

$$\left\{ \begin{aligned} e_{rn} &= -\frac{1}{n}\left[\frac{d}{dr}(r\overset{*}{e}_{\theta n}) + \frac{i\omega\mu}{c} r\overset{*}{h}_{zn}\right], \\ \overset{*}{e}_{rn} &= \frac{1}{n}\left[\frac{d}{dr}(re_{\theta n}) + \frac{i\omega\mu}{c} rh_{zn}\right], \end{aligned} \right. \qquad (n = 1,\ 2, \ldots), \tag{38}$$

e resta per ora indeterminata la e_{r0}.

La (26) dà poi la componente h_θ, che risulta della forma

$$h_\theta = h_{\theta 0} + \sum_{1} {}_n (h_{\theta n} \cos n\theta + \overset{*}{h}_{\theta n} \sin n\theta), \tag{39}$$

dove $h_{\theta n}$ ed $\overset{*}{h}_{\theta n}$ (per $n = 1, 2, \ldots$) si esprimono mediante elementi noti, mentre si ha

$$h_{\theta 0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}\, e_{,0} - \frac{ic}{\mu\omega}\left(\frac{de_{z0}}{dr} + i\frac{C_0}{r}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}}\,\beta_1\right). \tag{40}$$

Sostituendo nella terza delle (10′) in luogo di h_θ l'espressione (39), si ricava per $h_{\theta 0}$ l'equazione

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rh_{\theta 0}) = \frac{i\omega\varepsilon_0}{c} e_{z0}$$

e quindi

$$h_{\theta 0} = \frac{i\omega\varepsilon_0}{c}\frac{1}{r}\int_a^r e_{z0} r\,dr + \frac{K_0}{r},$$

dove e_{z0} è già nota e K_0 è costante arbitraria. Infine dalla (40) si ricava la $e_{,0}$. Se si prescinde dall'incremento del campo dovuto alla costante arbitraria K_0, che è della forma della *soluzione base* (1), tutti gli elementi incogniti risultano determinati.