Angelo Pistoia

Sulla serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |\sin(\lambda_k x)|^{v_k}$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.1, p. 41–45.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_1_41_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Sulla serie $\sum_{1}^{\infty}{}_k \, \alpha_k \,|\sin(\lambda_k x)|^{\nu_k}$.

Nota di ANGELO PISTOIA (a Milano)

Sunto. - *Si considera la serie*

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_k \, \alpha_k \,|\sin(\lambda_k x)|^{\nu_k}$$

supponendo che sia $\alpha_k \geq 0$, $\lambda_k \geq 0$, $\nu_k \geq \mathrm{q} > 0$, $x \in \mathrm{I} \equiv (0 \leq x < +\infty)$. *Si indica una condizione necessaria e sufficiente affinchè la* (1) *converga per quasi tutti gli* x *dell'intervallo* I *ed abbia per somma una funzione* $\varphi(x)$ *tale che* $x^{-\mathrm{p}}\varphi(x)$, $1 < \mathrm{p} < \mathrm{q} + 1$, *sia sommabile in* I.

Consideriamo la serie

$$(2) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_k \, \alpha_k \,|\sin(\lambda_k x)|^{\nu_k}$$

supponendo che sia

$$\alpha_k \geq 0, \quad \nu_k \geq q > 0, \quad \lambda_k \geq 0, \quad x \in I \equiv (0 \leq x < +\infty).$$

Si prenda poi un numero p con $1 < p < q + 1$.
Sussiste allora il seguente

TEOREMA. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie* (2) *converga per quasi tutti gli* x *dell'intervallo* I *e abbia per somma una funzione* $\varphi(x)$ *tale che* $x^{-p}\varphi(x)$ *sia sommabile in* I *è che converga la serie*

$$(3) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_k \frac{\alpha_k \lambda_k^{p-1}}{\sqrt{\nu_k}}, \ (^1).$$

(1) Un analogo teorema, concernente la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_n \alpha_n \sin nx$ è stato dimostrato da P. HEYWOOD (cfr. P. HEYWOOD, *On the integrability of functions defined by trigonometric series*, The Quart. Journ. of Math., Oxford second series, 5, 1954, 71), supponendo la successione $\{\alpha_n\}$ non crescente (oltre che infinitesima).

La condizione è sufficiente. Infatti risulta

$$\sum_{1}^{n}{}_k \int_0^\infty x^{-p} \alpha_k \mid \sin(\lambda_k x) \mid^{\nu_k} dx =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_k \ \alpha_k \lambda_k^{p-1} \int_0^\infty t^{-p} \ \sin t \mid^{\nu_k} dt =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_k \ \alpha_k \lambda_k^{p-1} I(p, \nu_k)$$

avendo posto

$$I(p, \nu_k) = \int_0^1 t^{-p} (\sin t)^{\nu_k} dt + \int_1^\infty t^{-p} \mid \sin t \mid^{\nu_k} dt$$

$$= I_1(p, \nu_k) + I_2(p, \nu_k).$$

Risulta poi

$$I_1(p, \nu_k) = \int_0^1 t^{-p} (\sin t)^{\nu_k} dt < \int_0^1 t^{-p+\nu_k} dt =$$

$$= \frac{1}{\nu_k - p + 1}$$

e inoltre, posto $L_p = \sum_0^\infty{}_n (1 + n\pi)^{-p}$,

$$I_2(p, \nu_k) = \int_1^\infty t^{-p} \mid \sin t \mid^{\nu_k} dt$$

$$= \int_1^{1+\pi} \dots dt + \int_{1+\pi}^{1+2\pi} \dots dt + \dots$$

$$= \int_1^{1+\pi} \mid \sin t \mid^{\nu_k} \{ t^{-p} + (t + \pi)^{-p} + \dots \} dt$$

$$< \{ 1 + (1 + \pi)^{-p} + \dots \} \int_1^{1+\pi} \mid \sin t \mid^{\nu_k} dt$$

$$= 2L_p \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{\nu_k} dt$$

$$= L_p \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu_k+1}{2}\right)}, \quad (^2),$$

$$= N_p \frac{1}{\nu_k} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_k}{2}\right)}$$

con $N_p = 2\sqrt{\pi}\, L_p$.

Ne segue

$$(4) \qquad I(p, \nu_k) = I_1(p, \nu_k) + I_2(p, \nu_k) <$$

$$< \frac{1}{\nu_k - p + 1} + N_p \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_k+1}{2}\right)}{\nu_k \Gamma\left(\frac{\nu_k}{2}\right)}$$

$$< \frac{1}{\nu_k - p + 1} + N_p \frac{\dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu_k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_k}{2}\right)}}{\nu_h - p + 1}$$

$$= \frac{c_k}{\nu_k - p + 1},$$

avendo posto

$$(5) \qquad c_k = 1 + N_p \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_k}{2}\right)}.$$

Risulta poi, dette A e B due costanti positive indipendenti da k,

$$(6) \qquad \frac{A}{\sqrt{\nu_k}} < \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_k+1}{2}\right)}{\nu_k \Gamma\left(\frac{\nu_k}{2}\right)} < \frac{B}{\sqrt{\nu_k}}, \quad (^3).$$

(2) Cfr., ad esempio, E. T. WHITTAKER, G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, IV Edit., Cambridge 1940, pgg. 237, 240, 256.

(3) È $\nu_k \geq q > 0$. Risulta, per la formula di STIRLING, (cfr., ad es. op.

Ne segue, indicata con D_p una costante positiva indipendente da k, ed osservando che è $\nu_k \geq q > 0$,

$$c_k < 1 + BN_p \sqrt{\nu_k} \leq \frac{\sqrt{\nu_k}}{\sqrt{q}} + BN_p \sqrt{\nu_k}$$
$$= D_p \sqrt{\nu_k}.$$

Dalla (4) scende pertanto

$$I(p, \nu_k) < D_p \frac{\sqrt{\nu_k}}{\nu_k - p + 1}$$

e quindi anche, detta H_p una costante positiva indipendente da k,

$$I(p, \nu_k) < \frac{H_p}{\sqrt{\nu_k}} \ , \ (^4).$$

È allora

$$\sum_1^n{}_k \alpha_k \int_0^\infty x^{-p} \,|\sin (\lambda_k x)|^{\nu_k} dx =$$
$$= \sum_1^n{}_k \alpha_k \lambda_k{}^{p-1} I(p, \nu_k)$$
$$< H_p \sum_1^n{}_k \frac{\alpha_k \lambda_k{}^{p-1}}{\sqrt{\nu_k}} \leq$$
$$\leq H_p \sum_1^\infty{}_k \frac{\alpha_k \lambda_k{}^{p-1}}{\sqrt{\nu_k}}$$

cit. alla ([2]), pag. 253),

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu_k + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_k}{2}\right)} = \sqrt{\nu_k}\left(1 + \frac{1}{\nu_k}\right)^{\frac{\nu_k}{2}} \frac{e^{\frac{\theta_1}{6(\nu_k+1)} - \frac{\theta_2}{6\nu_k}}}{\sqrt{2e}} =$$
$$= \sqrt{\nu_k}\, \omega_k,$$

con $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, $A < \omega_k < B$ essendo A e B due costanti positive indipendenti da k.

Ne segue

$$\frac{A}{\sqrt{\nu_k}} < \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_k + 1}{2}\right)}{\nu_k \Gamma\left(\frac{\nu_k}{2}\right)} < \frac{B}{\sqrt{\nu_k}}.$$

([4]) È $\nu_k \geq q > 0$, $1 < p < q + 1$. Risulta $0 < \gamma \nu_k < \nu_k - p + 1$, cioè $0 < \gamma < 1 - \dfrac{p-1}{\nu_k}$, quando si supponga $0 < \gamma < 1 - \dfrac{p-1}{q}$. Ne segue,

$$\frac{\sqrt{\nu_k}}{\nu_k - p + 1} < \frac{1}{\gamma \sqrt{\nu_k}} = \frac{\gamma^*}{\sqrt{\nu_k}}.$$

e quindi la tesi, per la convergenza della serie (3) ed il teorema di integrazione per serie di BEPPO LEVI.

La condizione è necessaria. Infatti risulta

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{-p}\varphi(x)dx &\geq \sum_1^n{}_k \alpha_k \int_0^\infty x^{-p}\,|\sin(\lambda_k x)|^{\nu_k}\,dx \\
&= \sum_1^n{}_k \alpha_k \lambda_k^{p-1} \int_0^\infty t^{-p}\,|\sin t|^{\nu_k}\,dt \\
&\geq \sum_1^n{}_k \alpha_k \lambda_k^{p-1} \int_1^{1+\pi} t^{-p}\,|\sin t|^{\nu_k}\,dt \\
&\geq (1+\pi)^{-p} \sum_1^n{}_k \alpha_k \lambda_k^{p-1} \int_1^{1+\pi} |\sin t|^{\nu_k}\,dt \\
&= 2(1+\pi)^{-p} \sum_1^n{}_k \alpha_k \lambda_k^{p-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{\nu_k}\,dt \\
&= G_p \sum_1^n{}_k \alpha_k \lambda_k^{p-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_k+1}{2}\right)}{\nu_k \Gamma\left(\frac{\nu_k}{2}\right)}
\end{aligned}$$

avendo posto $G_p = (1+\pi)^{-p}\sqrt{\pi}$.

Dalla (6), posto $M_p = AG_p$, segue

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{-p}\varphi(x)dx &\geq G_p \sum_1^n{}_k \alpha_h \lambda_k^{p-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_k+1}{2}\right)}{\nu_k \Gamma\left(\frac{\nu_k}{2}\right)} \\
&\geq M_p \sum_1^n{}_k \frac{\alpha_k \lambda_k^{p-1}}{\sqrt{\nu_k}}
\end{aligned}$$

e quindi la tesi.

Il teorema è così completamente dimostrato.