Bollettino Unione Matematica Italiana

Giulia Pozzolo Ferraris

Sopra due curve notevoli.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.1, p. 46–49.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_1_46_0>

Sopra due curve notevoli.

Nota di GIULIA POZZOLO FERRARIS (a Vercelli)

Sunto. - *Si considerano due speciali curve sghembe e si determinano le tangenti in un punto qualunque di esse; nel caso particolare di curve piane vengono ritrovate, in modo semplice, proprietà stabilite da* F. TISSERAND.

1. Data una curva sghemba γ, descritta da un punto funzione della variabile t, ne sia $P(t)$ un punto generico ed $\boldsymbol{n}$ il vettore unitario, parallelo alla normale principale di γ in P, e diretto verso il centro di curvatura C di γ in P; poi consideriamo un piano α perpendicolare ad $\boldsymbol{n}$, il quale incontri, nelle vicinanze di P, la curva γ in due punti P_1 e P_2, da parti opposte di P, e sia M il punto medio fra P_1 e P_2; al variare del piano α, il punto M descrive una curva, passante per P, la quale si chiama *curva diametrale* di γ, rispetto a P.

Ci proponiamo ora di *determinare la tangente in P a tale curva*.

Supponiamo che il punto P_1 corrisponda al valore $t-h$ del parametro t, e che il punto P_2 corrisponda al valore $t+k$ del parametro, in guisa che potremo scrivere:

$$P_1 = P(t-h)\,; \qquad P_2 = P(t+k)\,;$$

poichè la corda P_1P_2 è ortogonale al vettore $\boldsymbol{n}$, ne segue:

$$[P(t-h) - P(t+k)] \times \boldsymbol{n} = 0, \tag{1}$$

equazione che determina k in funzione di h; se questa equazione dà per k più di un valore. si dovrà considerare solo quello che si riduce a zero per $h=0$.

Essendo M il punto medio tra P_1 e P_2 si ha:

$$M = \frac{1}{2}\,[P(t-h) + P(t+k)]\,,$$

da cui, derivando rispetto ad h e badando che k è funzione di h, a norma della (1), si ottiene:

$$\frac{dM}{dh} = \frac{1}{2}\left[-P'(t-h) + P'(t+k)\frac{dk}{dh}\right]; \tag{2}$$

ma, derivando la (1), risulta:

$$\left[P'(t-h) + P'(t+k)\frac{dk}{dh}\right] \times \boldsymbol{n} = 0, \tag{3}$$

da cui:

$$\frac{dk}{dh} = -\frac{P'(t-h)\times \boldsymbol{n}}{P'(t+k)\times \boldsymbol{n}}, \tag{4}$$

e sostituendo nella (2) si ottiene il vettore dM/dh, che dà la direzione della tangente alla curva diametrale nel punto M.

Per avere la tangente a tale curva in P, dobbiamo fare tendere h a zero nella (2), e perciò occorre calcolare il limite di dk/dh; per questo deriviamo la (3) rispetto ad h e avremo:

$$\left[-P''(t-h)+P''(t+k)\left(\frac{dk}{dh}\right)^2+P'(t+k)\frac{d^2k}{dh^2}\right]\times n=0, \tag{5}$$

e pertanto, se h (e quindi k) tende a zero, ne segue:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{dk}{dh}\right)^2=1$$

e dovremo considerare solo il valore

$$\lim_{h\to 0}\frac{dk}{dh}=1,$$

per il quale la (2) mostra che:

$$\lim_{h\to 0}\frac{dM}{dh}=0;$$

in tal caso, come è noto, per avere la tangente occorre calcolare la derivata seconda d^2M/dh^2; per questo basta derivare la (2) e si trova:

$$\frac{d^2M}{dh^2}=\frac{1}{2}\left[P''(t-h)+P''(t+k)\left(\frac{dk}{dh}\right)^2+P'(t+k)\frac{d^2k}{dh^2}\right], \tag{6}$$

da cui:

$$\lim_{h\to 0}\frac{d^2M}{dh^2}=\frac{1}{2}\left[2P''(t)+P'(t)\lim_{h\to 0}\frac{d^2k}{dh^2}\right]; \tag{7}$$

occorre perciò calcolare d^2k/dh^2; ciò si ricava dalla (5) derivando rispetto ad h e si ottiene:

$$\left[P'''(t-h)+P'''(t+k)\left(\frac{dk}{dh}\right)^3+3P''(t+k)\frac{dk}{dh}\cdot\frac{d^2k}{dh^2}+P'(t+k)\frac{d^3k}{dh^3}\right]\times n=0$$

da cui:

$$\lim_{h\to 0}\frac{d^2k}{dh^2}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{P'''(t)\times n}{P''(t)\times n};$$

dopo ciò la (7) porge:

$$\lim_{h\to 0}\frac{d^2M}{dh^2}=P''-\frac{1}{3}\frac{P'''\times n}{P''\times n}\cdot P';$$

questo vettore dà dunque la direzione della tangente alla curva diametrale in P; tale direzione è la stessa di quella del vettore

$$u=-P'''\times n\cdot P'+3P''\times n\cdot P'' \tag{8}$$

e pertanto la tangente alla curva diametrale in P giace sul piano osculatore a γ in P.

2. Supponiamo ora che il punto P sia funzione dell'arco s della curva γ; allora il vettore

$$P' = dP/ds = t$$

è unitario e tangente a γ in P, nel verso degli archi crescenti, e inoltre, per una formula di Frenet:

$$P'' = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\rho} n,$$

ove ρ è il raggio di curvatura di γ in P; ne segue:

$$P''' = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds} n + \frac{1}{\rho}\frac{dn}{ds},$$

quindi:

$$P''' \times n = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds},$$

perchè:

$$n \times \frac{dn}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dn^2}{ds} = 0;$$

dopo ciò, la (8) diventa:

$$u = \frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds} t + \frac{3}{\rho^2} n = \frac{3}{\rho^2}\left(\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds} t + n\right).$$

Se sulla normale principale a γ in P si prende il punto Q in modo che $Q - P = n$, e sulla parallela in Q alla tangente a γ in P si prende il punto R in modo che:

$$R - Q = \frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds} t$$

è chiaro che PR sarà la tangente in P alla curva diametrale; inoltre, se C è il centro di curvatura di γ in P e CD è parallelo a QR, si ha:

$$\frac{CD}{PC} = \frac{QR}{PQ} = \frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds};$$

da cui:

$$CD = \frac{1}{3}\rho\frac{d\rho}{ds}. \tag{9}$$

3. Supponiamo, in particolare, che la curva γ sia *piana*, e diciamo ρ_1 il raggio di curvatura in C dell'evoluta della curva γ; è allora facile vedere che

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\rho_1}{\rho},$$

perciò la (9) mostra che $\rho_1 = 3CD$, la quale esprime che *il raggio di curvatura dell'evoluta di una curva piana è triplo del segmento di normale a tale evoluta compreso fra il centro di curvatura della curva data e la tangente alla curva diametrale relativa alla curva data.*

Questa interessante proprietà è dovuta a F. TISSERAND [1], che l'ha stabilita con procedimento del tutto diverso e meno semplice.

4. Sia ancora γ una curva sghemba qualunque, e per ogni suo punto P tiriamo un segmento PQ di lunghezza data a, che stia nel piano osculatore di γ in P e formi un angolo dato α con la tangente alla curva γ in P; il luogo di Q è una certa curva e ora mostreremo che *la sua tangente in* P *è perpendicolare alla congiungente il punto* Q *col centro di curvatura di* γ *in* P.

Infatti, introducendo i soliti versori $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ della tangente. normale principale e binormale, si ha:

$$Q - P = a\cos\alpha\boldsymbol{t} + a\,\mathrm{sen}\,\alpha\boldsymbol{n}, \tag{10}$$

e derivando rispetto all'arco s di γ e tenendo conto delle formule di FRENET, si ottiene;

$$\frac{dQ}{ds} - \boldsymbol{t} = a\cos\alpha\cdot\frac{1}{\rho}\boldsymbol{n} + a\,\mathrm{sen}\,\alpha\left(-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{t} - \frac{1}{\tau}\boldsymbol{b}\right),$$

essendo ρ e τ la curvatura e la torsione di γ in P; si può scrivere:

$$\frac{dQ}{ds} = \left(1 - \frac{a\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\rho}\right)\boldsymbol{t} + \frac{a\cos\alpha}{\rho}\boldsymbol{n} - \frac{a\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\tau}\boldsymbol{b}: \tag{11}$$

ma se C è il centro di curvatura di γ in P si ha:

$$C - P = \rho\boldsymbol{n},$$

quindi, dalla (10):

$$Q - C = a\cos\alpha\cdot\boldsymbol{t} + (a\,\mathrm{sen}\,\alpha - \rho)\boldsymbol{n}$$

di qui e dalla (11) segue:

$$(Q - C)\times\frac{dQ}{ds} = 0,$$

che dimostra la proprietà enunciata.

Se, in particolare, la curva γ è *piana*, la normale al luogo del punto Q è senz'altro la retta QC. Tale proprietà è dovuta a F. TISSERAND (*Op. citata,* pag 65).

[1] F. TISSERAND, *Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal;* deuxième édit., pag. 69 (Gauthier-Villars, Paris, a. 1896).