Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ernest Stipanić

# Due teoremi sulle serie a termini positivi.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **12** (1957), n.1, p. 50–56.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_1_50_0>

# Due teoremi sulle serie a termini positivi.

Nota di ERNEST STIPANIĆ (a Belgrado)

**Sunto.** - N. H. ABEL *ha dimostrato* [1] *il seguente teorema:*

*Se* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ *è una serie divergente a termini positivi, allora la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}$ *sarà divergente, dove* $D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$.

*Partendo dalla serie convergente a termini positivi* U. DINI *ha dimostrato* [2] *il teorema analogo:*

*Se* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *è una serie convergente a termini positivi, allora la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r_{n-1}}$ *sarà divergente, dove* $r_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k$.

*Tutti i due teoremi sono stati generalizzati* [3].

*In questo lavoro dimostreremo un teorema riguardante le serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_n}{r_{n-1}} - \frac{c'_n}{r'_{n-1}}\right) \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_n}{r_n} - \frac{c'_n}{r'_n}\right)$$

*ed un altro riguardante le serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d_n}{D_n} - \frac{d'_n}{D'_n}\right) \quad e \quad \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{d_n}{D_{n-1}} - \frac{d'_n}{D'_{n-1}}\right)$$

*dove* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n$ *sono serie convergenti mentre* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} d'_n$ *sono serie divergenti a termini positivi.*

TEOREMA 1. - *Siano*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} c'_n$$

*due serie convergenti a termini positivi e sia* s *la somma della prima serie e* s′ *la somma della seconda serie.*

*Se*

$$c_n \sim c'_n, \; n \to \infty \qquad \left(\frac{c_n}{c'_n} \to g, \; g > 0, \; n \to \infty\right) \tag{1,1}$$

*e*

$$\frac{c'_n}{r'_{n-1}} \leq \frac{c_n}{r_{n-1}} \qquad \left(n \in N; \; r_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k; \; r'_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} c'_k\right) \text{(1)} \tag{1,2}$$

(1) $N$ è l'insieme dei numeri naturali. Quando è $\frac{c'_n}{r'_{n-1}} \geq \frac{c_n}{r_{n-1}}$, $n \in N$ i ragionamenti saranno completamente analoghi ai ragionamenti pel caso $\frac{c'_n}{r'_{n-1}} \leq \frac{c_n}{r_{n-1}}$, $n \in N$.

*allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_n}{r_{n-1}}-\frac{c'_n}{r'_{n-1}}\right) \tag{1,3}$$

*sarà convergente ed avrà la somma*

$$\sigma=\frac{\Theta}{g}\left(\frac{s}{s'}-g\right) \qquad (0\leq\Theta<1). \tag{1,4}$$

*Se*

$$c_n=0(c'_n),\ n\to\infty \qquad \left(\frac{c_n}{c'_n}\to 0,\ n\to\infty\right) \tag{1,5}$$

*allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{c_n}{r_n}-\frac{c'_n}{r'_n}\right| \tag{1,6}$$

*sarà divergente.*

DIMOSTRAZIONE. - Dimostriamo preliminarmente l'asserzione quando sono soddisfatte le condizioni (1,1) e (1,2). Essendo

$$\frac{c_n}{r_{n-1}}-\frac{c'_n}{r'_{n-1}}=\frac{r'_n}{r'_{n-1}}-\frac{r_n}{r_{n-1}}=\frac{r'_n}{r_{n-1}}\left(\frac{r_{n-1}}{r'_{n-1}}-\frac{r_n}{r'_n}\right) \qquad (n\in N)$$

risulta quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_n}{r_{n-1}}-\frac{c'_n}{r'_{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n'}{r_{n-1}}\left(\frac{r_{n-1}}{r'_{n-1}}-\frac{r_n}{r'_n}\right). \tag{1,7}$$

Dalla condizione (1,1) segue

$$\frac{r_n}{r'_n}\to g,\ n\to\infty \tag{1,8}$$

e perciò è

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_{n-1}}{r'_{n-1}}-\frac{r_n}{r'_n}\right)=\frac{s}{s'}-g \tag{1,9}$$

dove sono $r_0=s$ e $r_0'=s'$.

Dalla condizione (1,2) segue

$$\frac{r'_{n-1}-r'_n}{r'_{n-1}}\leq\frac{r_{n-1}-r_n}{r_{n-1}} \qquad (n\in N)$$

oppure

$$\frac{r_n}{r'_n}\leq\frac{r_{n-1}}{r'_{n-1}} \qquad (n\in N) \tag{1,10}$$

In base alle relazioni (1,8) e (1.10) avremo

$$\inf \frac{r_n}{r'_n} = g \quad \text{e} \quad \sup \frac{r_n}{r'_n} = \frac{s}{s'}. \tag{1,11}$$

Poichè

$$0 < \frac{r'_n}{r_{n-1}} < \frac{r'_n}{r_n} \qquad (n \in N)$$

risulta in rapporto alla (1,11) che deve essere

$$0 < \frac{r'_n}{r_{n-1}} < \frac{1}{g} \qquad (n \in N). \tag{1,12}$$

Dunque, in base alle (1,7), (1,9), (1,10) e (1,12) segue

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{c_n}{r_{n-1}} - \frac{c'_n}{r'_{n-1}} \right) < \frac{1}{g} \left( \frac{s}{s'} - g \right)$$

cioè la serie (1,3) sarà convergente ed avrà la somma (1.4).

Dimostriamo ora l'asserzione quando è soddisfatta la condizione (1,5).

Mettiamo

$$\frac{r_n}{r'_n} = \frac{r_0}{r'_0} \prod_{k-1}^{n} \frac{r_k\, r'_k}{r_{k-1}/r'_{k-1}} \qquad (n \in N)$$

oppure

$$\frac{r_n}{r'_n} = \frac{r_0}{r'_0} \prod_{k=1}^{n} \left( 1 - \frac{r_{k-1}/r'_{k-1} - r_k/r'_k}{r_{k-1}/r'_{k-1}} \right) \qquad (n \in N). \tag{1,13}$$

Dalla condizione (1,5) segue

$$\frac{r_n}{r'_n} \to 0, \;\; n \to \infty$$

e perciò in rapporto alla (1,13) la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{r_{k-1}/r'_{k-1} - r_k/r'_k}{r_{k-1}/r'_{k-1}} \right| \tag{1,14}$$

sarà divergente. Perchè, se la serie (1,14) fosse stata convergente, allora in base ai noti teoremi dalla teoria dei prodotti infiniti [4] sarebbe anche convergente il prodotto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \left| \frac{r_{k-1}/r'_{k-1} - r_k/r'_k}{r_{k-1}/r'_{k-1}} \right| \right)$$

rispettivamente, il prodotto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{r_{k-1}/r'_{k-1}-r_k/r'_k}{r_{k-1}/r'_{k-1}}\right).$$

In rapporto alla relazione (1,13) risulterebbe

$$\frac{r_n}{r'_n}\to q\neq 0,\ n\to\infty$$

che è in contraddizione con la supposizione (1,5). Dunque, la serie (1,14) deve essere divergente.

Poichè

$$\left|\frac{r_{n-1}/r'_{n-1}-r_n/r'_n}{r_{n-1}/r'_{n-1}}\right|=\frac{r_n}{r_{n-1}}\left|\frac{r_{n-1}}{r_n}-\frac{r'_{n-1}}{r'_n}\right| \qquad (n\in N)$$

si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}/r'_{n-1}-r_n/r'_n}{r_{n-1}/r'_{n-1}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{r_{n-1}}\left|\frac{r_{n-1}}{r_n}-\frac{r'_{n-1}}{r'_n}\right|. \tag{1,15}$$

Inoltre è

$$0<\frac{r_n}{r_{n-1}}<1. \tag{1,16}$$

Siccome la serie (1,14) è divergente, si conclude facilmente, in base alle (1,15) e (1,16), che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r_{n-1}}{r_n}-\frac{r'_{n-1}}{r'_n}\right|$$

sarà divergente, cioè la serie (1,6). Con ciò il teorema è completamente dimostrato.

Teorema 2. - *Siano*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d'_n$$

*due serie divergenti a termini positivi.*

*Se*

$$d_n\sim d'_n,\ n\to\infty \qquad \left(\frac{d_n}{d'_n}\to t,\ t>0,\ n\to\infty\right) \tag{2,1}$$

*e*

$$\frac{d'_n}{D'_n}\leq\frac{d_n}{D_n} \qquad \left(n\in N;\ D_n=\sum_{k=1}^{n} d_k;\ D'_n=\sum_{k=1}^{n} d'_k\right) \tag{2.2}$$ [2]

[2] Quando è $\frac{d'_n}{D'_n}\geq\frac{d_n}{D_n}$, $n\in N$ i ragionamenti saranno completamente analoghi ai ragionamenti pel caso $\frac{d'_n}{D'_n}\leq\frac{d_n}{D_n}$, $n\in N$.

*allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d_n}{D_n}-\frac{d'_n}{D'_n}\right) \tag{2,3}$$

*sarà convergente ed avrà la somma*

$$S=\vartheta\frac{d'_1}{d_1}\left(t-\frac{d_1}{d'_1}\right) \qquad (0\leq\vartheta<1). \tag{2,4}$$

*Se*

$$d_n=0(d'_n),\ n\to\infty \qquad \left(\frac{d_n}{d'_n}\to 0,\ n\to\infty\right) \tag{2,5}$$

*allora la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{d_n}{D_{n-1}}-\frac{d'_n}{D'_{n-1}}\right| \tag{2,6}$$

*sarà divergente*

Dimostrazione (3). - Si arriva facilmente alla relazione

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d_n}{D_n}-\frac{d'_n}{D'_n}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{D'_{n-1}}{D_n}\left(\frac{D_n}{D'_n}-\frac{D_{n-1}}{D'_{n-1}}\right). \tag{2,7}$$

In base al noto teorema di Stolz-Jensen [5] dalla condizione (2,1) segue

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D_n}{D'_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{d'_n}=t$$

e perciò

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{D'_n}{D_n}-\frac{D_{n-1}}{D'_{n-1}}\right)=t-\frac{d_1}{d'_1}. \tag{2,8}$$

Dalla condizione (2,2) segue

$$\frac{D'_n-D'_{n-1}}{D'_n}\leq\frac{D_n-D_{n-1}}{D_n} \qquad (n\in N;\ D_0=D_0'=0)$$

oppure

$$\frac{D_{n-1}}{D'_{n-1}}\leq\frac{D_n}{D'_n} \qquad (n\in N/1) \tag{2.9}$$

che significa

$$\inf\frac{D_n}{D'_n}=\frac{d_1}{d'_1} \quad \text{e} \quad \sup\frac{D_n}{D'_n}=t.$$

Essendo

$$0<\frac{D'_{n-1}}{D_n}<\frac{D'_n}{D_n} \qquad (n\in N)$$

(3) Daremo la dimostrazione di questo teorema in una forma abbreviata perchè essa è analoga alla dimostrazione del teorema precedente.

risulta in rapporto alla (2,9) che deve essere

(2,10) $$0 < \frac{D'_{n-1}}{D_n} < \frac{d'_1}{d_1} \qquad (n \in N).$$

Dunque, in base alle (2,7), (2,8) e (2,10) segue

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d_n}{D_n} - \frac{d'_n}{D'_n}\right) < \frac{d'_1}{d_1}\left(t - \frac{d_1}{d'_1}\right)$$

cioè la serie (2,3) sarà divergente ed avrà la somma (2,4).

Se è soddisfatta la condizione (2,5), allora si dimostra analogamente come nel caso della serie (1,14), che la serie

(2,11) $$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{D_{n-1}/D'_{n-1} - D_n/D'_n}{D_{n-1}/D'_{n-1}} \right|$$

deve essere divergente.

Poichè

(2,12) $$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{D_{n-1}/D'_{n-1} - D_n/D'_n}{D_{n-1}/D'_{n-1}} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{D'_{n-1}}{D'_n} \left| \frac{D'_n}{D'_{n-1}} - \frac{D_n}{D_{n-1}} \right|$$

ed oltre è

(2,13) $$0 < \frac{D'_{n-1}}{D'_n} < 1 \qquad (n \in N)$$

risulta in base alle (2,12) e (2,13) che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{D'_n}{D'_{n-1}} - \frac{D_n}{D_{n-1}} \right|$$

sarà divergente, perchè la serie (2,11) è divergente. Siccome

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} - \frac{D'_n}{D'_{n-1}} = \frac{d_n}{D_{n-1}} - \frac{d'_n}{D'_{n-1}} \qquad (n \in N/1)$$

segue che anche la serie (2,6) sarà divergente. Con ciò il teorema è completamente dimostrato.

Osservazione. - Se si prende

$$D_n^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu^{(k-1)} \quad \text{e} \quad D_n'^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu'^{(k-1)} \qquad (D_n^{(0)} = d_n;\ D_n'^{(0)} = d_n')$$

e si suppone che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D_n^{(k-1)}}{D_n'^{(k-1)}}$$

esiste per un numero naturale $k$, allora si vedrà facilmente, secondo il principio d'induzione completa ed in base al noto teorema di STOLZ–JENSEN ed alle (2,1) e (2,5), che la relazione

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D_n^{(k)}}{D_n'^{(k)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{D_n^{(k-1)}}{D_n'^{(k-1)}}$$

sarà soddisfatta per ogni $k \in N$.

L'ultimo teorema si può ora enunciare in una forma generalizzata nel modo seguente:

*Siano*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d'_n$$

*due serie divergenti a termini positivi.*

*Se*

$$d_n \sim d'_n,\ n\to\infty \qquad \left(\frac{d_n}{d'_n}\to t,\ t>0,\ n\to\infty\right)$$

*e*

$$\frac{D_n'^{(k-1)}}{D_n'^{(k)}} \leq \frac{D_n^{(k-1)}}{D_n^{(k)}} \qquad (n \in N)$$

*per un numero naturale* $\mathrm{k}=\mathrm{p}$, *allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D_n^{(p-1)}}{D_n^{(p)}}-\frac{D_n'^{(p-1)}}{D_n'^{(p)}}\right)$$

*sarà convergente ed avrà la somma*

$$S^{(p)}=\mu\frac{D_1'^{(p-1)}}{D_1^{(p-1)}}\left(t-\frac{D_1^{(p-1)}}{D_1'^{(p-1)}}\right) \qquad (0\leq\mu<1).$$

*Se*

$$d_n=0(d_n'),\ n\to\infty \qquad \left(\frac{d_n}{d'_n}\to 0,\ n\to\infty\right)$$

*allora la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{D_n^{(k-1)}}{D_{n=1}^{(k)}}-\frac{D'^{(k-1)}}{D_{n-1}^{(k)}}\right|$$

*sarà divergente per ogni* $\mathrm{k}\in\mathrm{N}$.

È evidente che la dimostrazione di questo teorema è completamente analoga alla dimostrazione del teorema precedente.

## BIBLIOGRAFIA


[1] « Journ. f. d. reine u. angew. Math. » Fasc. 3, p. 81, 1828, (K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, p. 299, Berlin 1931).

[2] U. DINI, *Sulle serie a termini positivi*, « Ann. delle Università Toscane », Fasc. 9, p. 33, 1867.

[3] Ibid, p. 34.
A. PRINGSHEIM, Math. Ann. Fasc. 35, p. 329, 1890.

[4] K. KNOPP, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, p. 229, Berlin, 1931.

[5] Ibid, p. 77-78.