Francesco Guglielmino

Corrispondenze puntuali fra due varietà a tre dimensioni che conservano le curve aventi nulla la seconda curvatura.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.1, p. 57–60.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_1_57_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Corrispondenze puntuali fra due varietà a tre dimensioni che conservano le curve aventi nulla la seconda curvatura.

Nota di FRANCESCO GUGLIELMINO (a Catania)

Sunto. - *Si veda il n. 1.*

1. Siano V_3 e V_3' due varietà metriche a tre dimensioni messe in corrispondenza puntuale biunivoca. Riferite le due varietà alle stesse coordinate, supponiamo che esse siano caratterizzate rispettivamente da

$$ds^2 = a_{ij} dx_i dx_j$$

e

$$ds'^2 = a'_{ij} dx_i dx_j .$$

Denotiamo, poi, con $\left\{ {ij \atop h} \right\}$ e $\left\{ {ij \atop h} \right\}'$ i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie per le due varietà e poniamo

$$\rho_{ij}^h = \left\{ {ij \atop h} \right\}' - \left\{ {ij \atop h} \right\} .$$

È noto che la corrispondenza fra le due varietà conserva le geodetiche (curve aventi nulla la prima curvatura) allora e solo quando

$$(1) \qquad \begin{gathered} 2\rho_{ij}^j - \rho_{ii}^i = 0 \ \ (i, j = 1, 2, 3;\ j \neq i), \\ \rho_{ij}^h = 0 \ \ (i, j, h = 1, 2, 3;\ j \geq i;\ h \neq i, j) \end{gathered}$$

per qualunque coppia di punti corrispondenti.

Scopo della presente Nota è dimostrare che le quindici condizioni (1) sono anche necessarie e sufficienti perchè la corrispondenza fra V_3 e V_3' sia tale che si corrispondano le curve aventi nulla (identicamente) la seconda curvatura (1).

2. Sia L una curva di V_3. Il versore tangenziale ad L in un punto generico ha le componenti controvarianti

$$t^i = \frac{dx_i}{ds} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

(1) Questa ricerca era stata proposta da P. NALLI: *Equazioni indipendenti dalla scelta delle variabili e caratterizzazione di varietà metriche*, « Boll. U. M. I. » Serie III, anno X, n. 2, pp. 135-146 (pag. 139).

Il derivato di tale versore lungo L ha, allora, le componenti

$$\sigma^i = \frac{d^2x_i}{ds^2} + \left\{ {hk \atop i} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_k}{ds} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3);$$

inoltre, il derivato secondo ha le componenti

$$\tau^i = \frac{d^3x_i}{ds^3} + 3 \left\{ {hk \atop i} \right\} \frac{d^2x_h}{ds^2} \frac{dx_k}{ds} + S(h,\ i,\ k,\ l) \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_k}{ds} \frac{dx_l}{ds} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

dove

$$S(h,\ i,\ k,\ l) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ {hk \atop i} \right\} + \left\{ {hp \atop i} \right\} \left\{ {k\,l \atop p} \right\}.$$

Se la seconda curvatura di L è nulla, risulta nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} t^1 & t^2 & t^3 \\ \sigma^1 & \sigma^2 & \sigma^3 \\ \tau^1 & \tau^2 & \tau^3 \end{vmatrix}$$

e la terza riga di questo determinante è combinazione lineare delle prime due che, come si vede facilmente [2], non sono proporzionali.

Quindi, se la seconda curvatura di L è nulla in ogni punto, lungo L sono soddisfatte le equazioni seguenti:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{d^3x_i}{ds^3} = \alpha(s) \frac{dx_i}{ds} + \beta(s) \frac{d^2x_i}{ds^2} + \beta(s) \left\{ {hk \atop i} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_k}{ds} - 3 \left\{ {hk \atop i} \right\} \frac{d^2x_h}{ds^2} \frac{dx_k}{ds} - \\ S(h,\ i,\ k,\ l) \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_k}{ds} \frac{dx_l}{ds} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \end{aligned}$$

dove $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ sono due convenienti funzioni.

Viceversa, se le funzioni $x_1(s)$, $x_2(s)$, $x_3(s)$, $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ soddisfano le (2) e, inoltre, risulta

$$(3)\qquad a_{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = 1,$$

la curva di equazioni parametriche

$$x_i = x_i(s) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

è riferita all'arco ed ha, qualora non sia una geodetica di V_3, la seconda curvatura nulla.

(2) Essendo $a_{ij}t^it^j = 1$ e $a_{ij}t^i\sigma^j = 0$, se fosse $\sigma^i = \lambda t^i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$, sarebbe $\lambda = 0$ e, quindi, $\sigma^i = 0$.

Allora, la ricerca delle curve di V_3 aventi nulla la seconda curvatura si riduce alla risoluzione del sistema formato dalle (2) e (3). Se come variabile indipendente si assume x_1 invece di s, dal sistema precedente. ricordando che, come è noto dall'analisi, si ha:

$$\frac{d^3x_r}{dx_1^3} = \frac{\dfrac{d^3x_r}{ds^3}\left(\dfrac{dx_1}{ds}\right)^2 - 3\dfrac{d^2x_r}{ds^2}\dfrac{dx_1}{ds}\dfrac{d^2x_1}{ds^2} + 3\dfrac{dx_r}{ds}\left(\dfrac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 - \dfrac{dx_r}{ds}\dfrac{dx_1}{ds}\dfrac{d^3x_1}{ds^3}}{\left(\dfrac{dx_1}{ds}\right)^5} \quad (r=2,3),$$

si deduce il seguente:

$$\frac{d^3x_r}{dx_1^3} = \left\{ \frac{d^2x_r}{dx_1^2} + \left[\genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{r} - \genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{1} \frac{dx_r}{dx_1} \right] \frac{dx_h}{dx_1}\frac{dx_k}{dx_1} \right\} \gamma(x_1) +$$

$$(4) \qquad 3\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{1} \frac{dx_r}{dx_1} - \genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{r} \right] \frac{d^2x_h}{dx_1^2}\frac{dx_k}{dx_1} + \qquad (r=2,\ 3)$$

$$\left[S(h,1,k,l)\frac{dx_r}{dx_1} - S(h,r,h,l) \right] \frac{dx_h}{dx_1}\frac{dx_k}{dx_1}\frac{dx_l}{dx_1}.$$

dove

$$\gamma(x_1) = \frac{\beta(s)}{\dfrac{dx_1}{ds}} - 3\frac{\dfrac{d^2x_1}{ds^2}}{\left(\dfrac{dx_1}{ds}\right)^2}$$

(al secondo membro bisogna pensare s come funzione di x_1).

Eliminando $\gamma(x_1)$ fra le equazioni (4) si perviene, infine, all'equazione differenziale seguente:

$$(5) \quad \frac{d^3x_2}{dx_1^3}\frac{d^2x_3}{dx_1^2} - \frac{d^3x_3}{dx_1^3}\frac{d^2x_2}{dx_1^2} + \frac{d^3x_2}{dx_1^3}\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{3} - \genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{1}\frac{dx_3}{dx_1} \right]\frac{dx_h}{dx_1}\frac{dx_k}{dx_1} +$$

$$\frac{d^3x_3}{dx_1^3}\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{1}\frac{dx_2}{dx_1} - \genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{2} \right]\frac{dx_h}{dx_1}\frac{dx_k}{dx_1} + 3\left(\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\right)^2\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{2\,k}{1}\frac{dx_3}{dx_1} - \genfrac\{\}{0pt}{}{2\,k}{3} \right]\frac{dx_k}{dx_1} +$$

$$3\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\frac{d^2x_3}{dx_1^2}\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{2\,k}{2} - \genfrac\{\}{0pt}{}{3\,k}{3} - \genfrac\{\}{0pt}{}{2\,k}{1}\frac{dx_2}{dx_1} + \genfrac\{\}{0pt}{}{3\,k}{1}\frac{dx_3}{dx_1} \right]\frac{dx_k}{dx_1} +$$

$$3\left(\frac{d^2x_3}{dx_1^2}\right)^2\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{3\,k}{2} - \genfrac\{\}{0pt}{}{3\,k}{1}\frac{dx_2}{dx_1} \right]\frac{dx_k}{dx_1} +$$

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2}\Bigg\{ 3\genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{3}\genfrac\{\}{0pt}{}{2l}{2} - 3\genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{2}\genfrac\{\}{0pt}{}{2l}{3} - S(h,3,k,l) + 3\left[\genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{1}\genfrac\{\}{0pt}{}{2l}{3} - \genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{3}\genfrac\{\}{0pt}{}{2l}{1} \right]\frac{dx_2}{dx_1} +$$

$$\left[3\genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{2}\genfrac\{\}{0pt}{}{2\,l}{1} - 3\genfrac\{\}{0pt}{}{hk}{1}\genfrac\{\}{0pt}{}{2\,l}{2} + S(h,1,k,l) \right]\frac{dx_3}{dx_1}\Bigg\}\frac{dx_h}{dx_1}\frac{dx_k}{dx_1}\frac{dx_l}{dx_1} +$$

$$\frac{d^2x_3}{dx_1^2}\Big\{3\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{hk}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{3\,l}{2}-3\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{hk}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{3\,l}{3}+S(h,\ 2,\ k,\ l)+$$

$$3\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{hk}{1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{3\,l}{3}-3\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{hk}{3}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{3\,l}{1}-S(h,\ 1,\ k,\ l)\Big]\frac{dx_2}{dx_1}+$$

$$3\Big[\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{hk}{2}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{3\,l}{1}-\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{hk}{1}\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{3\,l}{2}\Big]\frac{dx_3}{dx_1}\Big\}\frac{dx_h}{dx_1}\frac{dx_k}{dx_1}\frac{dx_l}{dx_1}+$$

$$\Big\{\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\,j}{3}S(h,\ 2,\ k,\ l)-\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\,j}{2}S(h,\ 3,\ k,\ l)+$$

$$\Big[\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\,j}{1}S(h,\ 3,\ k,\ l)-\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\,j}{3}S(h,\ 1,\ k,\ l)\Big]\frac{dx_2}{dx_1}+$$

$$\Big[\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\,j}{2}S(h,\ 1,\ k,\ l)-\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{i\,j}{1}S(h,\ 2,\ k,\ l)\Big]\frac{dx_3}{dx_1}\Big\}\frac{dx_i}{dx_1}\frac{dx_j}{dx_1}\frac{dx_h}{dx_1}\frac{dx_k}{dx_1}\frac{dx_l}{dx_1}=0.$$

Concludendo: lungo una curva di V_3 avente nulla la seconda curvatura è soddisfatta l'equazione differenziale (5) e, inversamente, se due funzioni

$$(6)\qquad x_2=f(x_1)\qquad \text{e}\qquad x_3=g(x_1)$$

soddisfano la (5), la curva di equazioni (6) ha, qualora non sia una geodetica di V_3, la seconda curvatura nulla.

3. Siamo ora in grado di dimostrare quanto è affermato alla fine del n. 1. Osserviamo subito che condizione necessaria e sufficiente affinchè la corrispondenza fra V_3 e V_3' conservi le curve aventi nulla la seconda curvatura è che l'equazione differenziale (5) coincida con l'analoga per V_3'. Basterà, allora, provare che le (1) sono condizioni necessarie e sufficienti perchè l'equazione (5) coincida con l'analoga per V_3'.

Le (1) sono necessarie. Infatti, se la (5) coincide con l'analoga equazione per V_3', si ha $\left(\text{identicamente rispetto a } x_1,\ x_2,\ x_3,\ \frac{dx_2}{dx_1},\ \frac{dx_3}{dx_1}\right)$:

$$(7)\ \Sigma_{hk}\Big[\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{hk}{r}-\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{hk}{1}\frac{dx_r}{dx_1}\Big]\frac{dx_h}{dx_1}\frac{dx_k}{dx_1}=\Sigma_{hk}\Big[\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{hk}{r}'-\genfrac{\{}{\}}{0pt}{}{hk}{1}'\frac{dx_r}{dx_1}\Big]\frac{dx_h}{dx_1}\frac{dx_k}{dx_1}\ (r=2,3)$$

e le (7) implicano le (1).

Le (1) sono sufficienti. Infatti, se sono vere le (1), non solo hanno luogo le identità (7) ma tutti i coefficienti del primo membro della (5) considerato come polinomio in $\frac{d^3x_2}{dx_1^3},\ \frac{d^3x_3}{dx_1^3},\ \frac{d^2x_2}{dx_1^2},\ \frac{d^2x_3}{dx_1^2}$ risultano identicamente eguali agli analoghi coefficienti per la varietà V_3'. Ciò si prova con calcoli piuttosto lunghi che non offrono, però, alcuna difficoltà.