Adriano Barlotti

Una limitazione superiore per il numero di punti appartenenti a una k-calotta $C(k, 0)$ di uno spazio lineare finito.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.1, p. 67–70.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_1_67_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Una limitazione superiore per il numero di punti appartenenti a una k-calotta $C(k, 0)$ di uno spazio lineare finito.

Nota di ADRIANO BARLOTTI (a Firenze)

Sunto. - *Si dà una limitazione superiore per il massimo numero di punti. a tre a tre non allineati, di uno spazio lineare finito di dimensione* n.

1. Indichiamo con $S_{n,q}$ uno spazio lineare proiettivo finito di dimensione $n(\geqq 3)$ costruito su un corpo di GALOIS di ordine q (¹). Sia $C(k, 0)$ una k-calotta avente l'indice di specializzazione zero di $S_{n,q}$, cioè un insieme di k punti di $S_{n,q}$ a tre a tre non allineati (²). In relazione a tali insiemi si presenta il seguente problema (³): *Dati* n *e* q, *quale è il massimo valore di* k *per cui in* $S_{n,q}$ *esiste qualche* C(k, 0)? Cioè, in altre parole, *quale è il massimo numero di punti, a tre a tre non allineati, di* $S_{n,q}$?

Denoteremo nel seguito con $M_{n,q}$ questo numero che naturalmente è funzione di n e di q. Per $n = 3$ e $q > 2$ B. QVIST (⁴), facendo seguito a dei risultati parziali conseguiti da R. C. BOSE [3] e da E. SEIDEN [7], ha dimostrato che risulta $M_{3,q} = q^2 + 1$. Successivamente G. TALLINI ha provato (⁵) che, quando sia $n > 3$, e $q > 2$, il numero in questione deve soddisfare alla disuguaglianza:

$$M_{n,q} < q^{n-1} + 1. \tag{1}$$

Scopo della presente nota è di mostrare come per $n > 3$ e $q > 4$ la (1) possa essere sostituita con una disuguaglianza migliore, e precisamente che vale il seguente teorema:

Detto $M_{n,q}$ *il massimo numero di punti a tre a tre non allineati di* $S_{n,q}$, *quando sia* $n > 3$ *e* q *dispari* $(\geqq 7)$ *vale la seguente disuguaglianza:*

$$M_{n,q} \leqq N_{n,q} = q^{n-1} - (q - 5)\sum_{i=0}^{n-4} q^i + 1. \tag{2}$$

Per $n > 3$ *e* $q = 5$ *risulta invece:*

$$M_{4,q} \leqq N_{4,q} = q^3 - 1, \tag{3}$$

(¹) Per le proprietà fondamentali di tali spazi si veda, p. es., B. SEGRE [5], § 17.

(²) Cfr. G. TALLINI [8], n. 4 e [9] n. 2.

(³) Il problema analogo per $n = 2$, cioè nel caso in cui l'insieme in questione risulta un k-arco è completamente risolto. Cfr., p. es., B. QVIST [4], pag. 8, Teorema 2, pag. 10, 4°; B. SEGRE [6], pag. 360, Teorema II.

(⁴) Cfr. B. QVIST [4], Teor. 6.

(⁵) Cfr. G. TALLINI [9] n. 4.

$$M_{n,q} \leqq N_{n,q} = q^{n-1} - 2q \sum_{i=0}^{n-5} q^i - 1, \qquad (n > 4). \tag{4}$$

Infine per q *pari, maggiore di due. si ha*·

$$M_{4,q} \leqq N_{4,q} = q^3, \tag{5}$$

$$M_{n,q} \leqq N_{n,q} = q^{n-1} - q \sum_{i=0}^{n-5} q^i \qquad (n > 4). \tag{6}$$

Ciò costituisce però sempre una risposta parziale al problema posto sopra, poichè resta ancora da vedere se, come è probabile, le disuguaglianze qui stabilite possano ulteriormente essere migliorate. dato che non siamo in grado di fornire nessun esempio in cui in esse valga il segno uguale.

2. Esaminiamo in un primo tempo il caso in cui è $n = 4$ e q dispari. Sia $\mathfrak{C}$ una calotta $C(k, 0)$ di $S_{4,q}$ per cui k ha il valore massimo ($= M_{4,q}$). Indichiamo con A e B due punti di $\mathfrak{C}$. Per la retta AB passano $q^2 + q + 1$ spazi a tre dimensioni S_3 di $S_{4,q}$. Se uno di questi S_3 contiene meno di h punti di $\mathfrak{C}$ con $h = q^2 - q + 7$ nel caso $q \geqq 7$, e con $h = q^2$ per $q = 5$, valgono senz'altro la (2) o la (3). Infatti anche nell'ipotesi che ciascuno dei q^2 piani per AB non appartenenti a quello spazio S_3 contenga il massimo numero di punti di $\mathfrak{C}$, cioè $q - 1$ punti oltre A e B, si trova:

$$k < q^2(q-1) + q^2 - q + 7 = q^3 - q + 7 \qquad \text{per } q \geqq 7,$$

$$k < q^2(q-1) + q^2 = q^3 \qquad \text{per } q = 5.$$

Supponiamo allora che si verifichi l'ipotesi contraria, cioè che ogni S_3 per la retta AB contenga almeno h punti della calotta. Nel seguito riconosceremo facilmente che ciò porta ad un assurdo, e risulteranno così provate la (2) per $n = 4$ e la (3).

Consideriamo un qualsiasi piano π per AB che contenga meno di $q + 1$ punti di $\mathfrak{C}$. Un piano almeno che soddisfi a questa condizione deve esistere, poichè in caso contrario risulterebbe $M_{4,q} = q^3 + 1$, e ciò verrebbe a contraddire alla (1). I punti comuni a $\mathfrak{C}$ e a π fanno parte di un $(q+1)$-arco Γ. Infatti, per $q = 5$ il numero di tali punti è $\leqq 5$ [6] e la cosa è allora ovvia; quando invece sia $q \geqq 7$, un qualunque S_3 per π contiene almeno $q^2 - q + 7$ punti di $\mathfrak{C}$, e quindi questi appartengono necessariamente ad una $(q^2 + 1)$-calotta [7] che, come è noto [8] risulta una quadrica a punti ellittici: l'intersezione di questa quadrica con π ci dà precisamente Γ. Inoltre essendo i punti comuni a $\mathfrak{C}$ e a π in numero

[6] Dal seguito risulterà che qui vale precisamente il segno uguale. Cfr [9].

[7] Cfr. A. Barlotti [2], n. 2.

[8] Cfr. A. Barlotti [1], teorema 1.

maggiore di quattro [9], l'arco Γ è perfettamente individuato. Sia allora P un punto di Γ che non appartenga a $\mathfrak{C}$. Poichè per ipotesi il numero k dei punti di $\mathfrak{C}$ ha il valore massimo, P deve essere allineato con due punti H e K di $\mathfrak{C}$ (ovviamente non appartenenti a π), altrimenti aggiungendo P ai punti di $\mathfrak{C}$ si otterrebbe una calotta $C(k+1, 0)$ possedente $k+1$ punti. Sia S_3^* lo spazio a tre dimensioni individuato da π e dalla retta HK. Per ipotesi esso contiene h' punti di $\mathfrak{C}$ a tre a tre non allineati, con $h' \geqq h$, ed allora [10] quei punti fanno parte di una quadrica a punti ellittici che contiene Γ e quindi, in particolare, anche P. È perciò assurdo supporre che H, K e P siano allineati; questo assurdo prova il nostro asserto.

3. Passiamo al caso in cui risulta $n > 4$ e, supponendo sempre q dispari, continuiamo a indicare con $\mathfrak{C}$ una calotta $C(k, 0)$ di $S_{n,q}$ per cui k ha il valore massimo $M_{n,q}$.

Osserviamo prima di tutto che se si può trovare un valore di r, con $3 \leqq r \leqq n-2$, tale che esista un S_r di S_n che contenga $N_{r,q}$ (n. 1) punti di $\mathfrak{C}$ [11], mentre a nessuno degli S_{r+1} per esso appartengono $N_{r+1,q}$ punti di $\mathfrak{C}$, risulta $M_{n,q} < N_{n,q}$. Si ha infatti:

$$M_{n,q} \leqq (N_{r+1,q} - N_{r,q} - 1) \sum_{i=0}^{n-r-1} q^i + N_{r,q} = N_{n,q} - \sum_{i=0}^{n-r-1} q^i < N_{n,q}.$$

Si riconosce poi subito che se nessuno dei piani passanti per una corda di $\mathfrak{C}$ contiene $q+1$ punti di questa calotta, o nessuno degli S_3 passanti per un piano che tagli $\mathfrak{C}$ lungo un $(q+1)$-arco contiene q^2+1 punti di $\mathfrak{C}$ è ugualmente $M_{n,q} < N_{n,q}$ [12]. Pertanto, se non è $M_{n,q} \leqq N_{n,q}$ c'è un piano almeno che taglia $\mathfrak{C}$ lungo un $(q+1)$-arco. Per l'osservazione precedente, sempre nell'ipotesi che non sia $M_{n,q} \leqq N_{n,q}$, c'è almeno un S_3 per quel piano che contiene q^2+1 punti di $\mathfrak{C}$ e, ancora per la medesima osservazione, ci dovranno essere un S_4 per detto S_3 al quale appartengono $N_{4,q}$ punti di $\mathfrak{C}$, e così via. Si troverà alla fine un S_{n-2} di S_n che contiene $N_{n-2,q}$ punti di $\mathfrak{C}$.

(9) Risulta più precisamente che quei punti sono in numero maggiore od uguale a sette per $q \geqq 7$ e uguale a cinque per $q = 5$. Cfr. A. BARLOTTI [2], n. 3, *b*).

(10) Cfr. A. BARLOTTI [2], n. 2.

(11) Per $r = 3$ si deve porre $N_{3,q} = q^2 + 1$.

(12) Nel primo caso risulta infatti:

$$M_{n,q} \leqq (q-2) \sum_{i=0}^{n-2} q^i + 2 = q^{n-1} - q \sum_{i=0}^{n-3} q^i < N_{n,q},$$

mentre nel secondo si ha:

$$M_{n,q} \leq (q^2 - q - 1) \sum_{i=0}^{n-3} q^i + q + 1 = q^{n-1} - q \sum_{i=0}^{n-4} q^i < N_{n,q}.$$

Siamo ora in grado di provare, usando un procedimento di induzione, che è in ogni caso $M_{n,q} \leqq N_{n,q}$. Nel n. 2 abbiamo riconosciuto che la disuguaglianza $M_{n,q} \leqq N_{n,q}$ vale per $n = 4$. Facciamo l'ipotesi che essa sussista per i valori maggiori di tre e minori di n e proviamo la sua validità per n. Supponiamo per assurdo che risulti $M_{n,q} > N_{n,q}$. Abbiamo visto che in tale ipotesi si può trovare un S_{n-2} di S_n che contiene $N_{n-2,q}$ punti di $\mathfrak{C}$. Ma a ciascuno degli S_{n-1} passanti per questo possono appartenere al più $N_{n-1,q}$ punti di $\mathfrak{C}$, risulta quindi:

$$M_{n,q} \leqq (N_{n-1,q} - N_{n-2,q})(q+1) + N_{n-2,q} = N_{n,q},$$

contro l'ipotesi assurda che sia $M_{n,q} > N_{n,q}$.

4. Esaminiamo infine il caso in cui è q pari. Basta osservare che la (5) è un caso particolare della (1) e che alla (6) si giunge con considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte nel n. 3, quando si escluda che la calotta in esame sia tagliata da qualche piano lungo un $(q+2)$-arco. Se poi esiste un piano, α, che contiene $q+2$ punti di una k-calotta, $C(k, 0)$, di $S_{n,q}$, si riconosce subito che risulta $k < N_{n,q}$. Infatti in tale ipotesi gli S_3 per α possono contenere al più q^2 punti di quella calotta ([13]) e quindi si ha:

$$k \leqq (q^2 - q - 2)\sum_{i=0}^{n-3} q^i + q + 2 = q^{n-1} - 2q\sum_{i=0}^{n-4} q^i < N_{n,q}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BARLOTTI, *Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo*, « Boll. U. M. I. », (3), 10, 1955, pp. 498-506.

[2] A. BARLOTTI, *Un'osservazione sulle* k*-calotte degli spazi lineari finiti di dimensione tre*, « Boll. U. M. I. » (3), 11, 1956, pp. 248-252.

[3] R. C. BOSE, *Mathematical theory of factorial design*, « Sankhya », vol. 8, pp. 107-166.

[4] B. QVIST, *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane*, « Annales Academiae Scientiarum Fennicae » (A), n. 134, 1952.

[5] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I, (Bologna, Zanichelli, 1948).

[6] B. SEGRE, *Curve razionali normali e* k*-archi negli spazi finiti*, « Annali di Mat. » (4), 39, 1955, pp. 357-379.

[7] E. SEIDEN, *A theorem in finite projective geometry and an application to statistics*, « Proc. of. the Amer. Math. Soc. » Vol. 1, pp. 282-286.

[8] G. TALLINI, *Sulle* k*-calotte degli spazi lineari finiti*, Nota II, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), 20, 1956, pp. 442-446.

[9] G. TALLINI, *Sulle* k*-calotte di uno spazio lineare finito*, « Annali di Mat », (4), 42, 1956, pp. 119-164.

([13]) Si ricordi che in S_3 nessun piano può tagliare una (q^2+1)-calotta in un $(q+2)$-arco. Cfr. A. BARLOTTI [1], n. 4.