# Bollettino Unione Matematica Italiana



Lorenzo Arus


## Su una generalizzazione di un teorema di Stieltjes.


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **12** (1957), n.2, p. 278–283.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_2_278_0>

# Su una generalizzazione di un teorema di Stjelties.

Nota di LORENZO ARUS (a Bologna)

**Sunto.** - *Dimostrazione di una proposizione sui complementi algebrici degli elementi di una matrice quadrata. Confronto di questa proposizione con un teorema di* STJELTIES *e uno di* DE RHAM *sullo stesso argomento. Generalizzazione dei risultati.*

**1.** Lo STJELTIES ([1]) ha dimostrato che se la matrice dei coefficienti di una forma quadratica definita positiva ha tutti gli elementi $a_{ik}$ non diagonali ($i \neq k$) negativi o nulli, la matrice inversa ha tutti gli elementi positivi o nulli, cioè $\frac{A_{ik}}{A} \geq 0$ per tutti gli $i$ e $k$; o, ciò che è lo stesso, poichè $A > 0$, tutti gli $A_{ik}$ sono positivi o nulli.

Questo teorema è stato generalizzato dal DE RHAM ([2]) per una matrice reale qualsiasi nel modo seguente: Se una matrice reale di determinante non nullo ha gli elementi non diagonali negativi o nulli e se tutti i suoi autovalori sono positivi o nulli, allora gli elementi della matrice inversa sono positivi o nulli; cioè $\frac{A_{ik}}{A} \geq 0$.

Tenendo però conto che gli autovalori della matrice sono soluzioni dell'equazione ([3]):

$$(1) \qquad \Sigma_\nu \quad (-1)^\nu \rho^\nu \sum_{\substack{i_1 \dots i_\nu \\ i_1 < i_2 \dots < i_\nu}} a_{(i_1 \dots i_\nu)(i_1 \dots i_\nu)} = 0$$

dove $a_{(i_1 \dots i_\nu)(i_1 \dots i_\nu)}$ è un minore principale di ordine $\nu$ e ricordando il teorema sulle funzioni simmetriche elementari delle radici di un'equazione ([4]) si vede che l'ipotesi degli autovalori positivi equivale a supporre che siano positivi sia il determinante $A$ che tutte le somme dei minori principali di ordine 1, 2, ..., $n - 1$:

$$\Sigma_i a_{ii}, \quad \Sigma_{\substack{i_1 i_2 \\ i_1 < i_2}} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} \end{vmatrix}, \ \dots \quad \Sigma_j A_{jj}$$

([1]) STJELTIES, *Opere*, Tomo II, pp. 73 75.

([2]) G. DE RHAM, *Sur un theorème de Stjelties relatif a certaines matrices*, Publications de l'Institut Mathematique, Acc. Serbe des Sciences, Tomo IV, 1952.

([3]) G. CIMMINO, *Analisi algebrica*, n. 85, p. 142, CEDAM, Padova 1946.

([4]) id. n. 88, p. 148.

Pertanto anche da questo teorema discende immediatamente che tutti gli $A_{ik}$ sono positivi o nulli, essendo implicitamente $A > 0$.

In questa nota ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema:

*Se in una matrice reale di ordine* n *tutti gli elementi* $a_{ik}$ *non diagonali* $(i \neq k)$ *sono negativi e tutti i suoi minori principali di ordine* $r \neq 1, 2, \ldots, n-1$ *sono positivi, allora risultano tali anche i complementi algebrici di tutti i suoi elementi;* il quale come vedremo è diverso dai teoremi di STJELTIES e di DE RHAM.

**2.** Per la dimostrazione del teorema enunciato ricordiamo che [5]:

$$a_{k_1k_1}A_{ik_1} + a_{k_1i}A_{ii} + \sum_{k}^{k\neq i,\, k_1} a_{k_1k}A_{ik} = 0 \qquad k_1 \neq i \tag{2}$$

Togliendo da questa uguaglianza il termine $a_{k_1i}A_{ii}$, per le ipotesi fatte, negativo, otteniamo:

$$a_{k_1k_1}A_{ik_1} + \sum_{k}^{k\neq i,\, k_1} a_{k_1k}A_{ik} > 0, \tag{3}$$

e, ricordando che $a_{k_1k_1}$ è positivo:

$$A_{ik_1} > \sum_{k}^{k\neq i,\, k_1} - \frac{a_{k_1k}}{a_{k_1k_1}} A_{ik}. \tag{4}$$

La (4) si può scrivere:

$$A_{ik_1} > - \frac{a_{k_1k_2}}{a_{k_1k_1}} A_{ik_2} + \sum_{k}^{k\neq i,\, k_1,\, k_2} - \frac{a_{k_1k}}{a_{k_1k_1}} A_{ik}, \tag{5}$$

da cui, sostituendo ad $A_{ik_2}$ il valore minorante dato dalla (4) con $k_2$ al posto di $k_1$, poichè $-\dfrac{a_{k_1k_2}}{a_{k_1k_1}}$ è positivo.

$$A_{ik_1} > \sum_{k}^{k\neq i,\, k_2} \frac{a_{k_1k_2}\, a_{k_2k}}{a_{k_1k_1}\, a_{k_2k_2}} A_{ik} + \sum_{k}^{k\neq i,\, k_1,\, k_2} - \frac{a_{k_1k}}{a_{k_1k_1}} A_{ik}. \tag{6}$$

Portiamo ora al primo membro il termine $k_1$-esimo della prima sommatoria e moltiplichiamo ambo i membri per il fattore positivo $a_{k_1k_1}a_{k_2k_2}$; perveniamo così alla relazione:

$$A_{ik_1}(a_{k_1k_1}a_{k_2k_2} - a_{k_1k_2}a_{k_2k_1}) > \sum_{k}^{k\neq i,\, k_1,\, k_2} - (a_{k_2k_2}a_{k_1k} - a_{k_1k_2}a_{k_2k})A_{ik}. \tag{7}$$

[5] G. CIMMINO, *Analisi algebrica*, n. 23, p. 33.

Ma i coefficienti degli $A_{ik}$ per $k = k_1, k_3, \ldots, k_n$ sono i minori:

$$\begin{vmatrix} a_{k_1 k} & a_{k_1 k_2} \\ a_{k_2 k} & a_{k_2 k_2} \end{vmatrix} \qquad k = k_1, k_3, \ldots, k_n \tag{8}$$

che indicheremo per comodità con $a_{(k_1 k_2)(k k_2)}$.

Allora la (7) si può scrivere:

$$a_{(k_1 k_2)(k_1 k_2)} A_{ik_1} > \sum_{k}^{k \neq i, k_1, k_2} - a_{(k_1 k_2)(k k_2)} A_{ik} \tag{9}$$

che è analoga alla (3), solo che nella somma viene a mancare ancora un termine.

Tenendo conto che $a_{(k_1 k_2)(k_1 k_2)}$ è un minore principale, quindi positivo, e che $a_{(k_1 k_2)(k k_2)} (k \neq k_1)$ è negativo come somma di termini negativi, possiamo procedere come nel caso della (3), ottenendo infine:

$$\begin{aligned} A_{ik_1}\left(a_{(k_1 k_2)(k_1 k_2)} a_{(k_2 k_3)(k_2 k_3)} - a_{(k_1 k_2)(k_2 k_3)} a_{(k_2 k_3)(k_1 k_2)}\right) > \\ > \sum_{k}^{k \neq i, k_1 k_2 k_3} - \left(a_{(k_1 k_2)(k k_2)} a_{(k_2 k_3)(k_2 k_3)} - a_{(k_1 k_2)(k_2 k_3)} a_{(k_2 k_3)(k k_2)}\right) A_{ik} . \end{aligned} \tag{10}$$

Per un noto teorema sui minori del determinante aggiunto di un determinante ([6]), i coefficienti degli $A_{ik}$, per $k = k_1, k_4, \ldots, k_n$, possono scriversi:

$$\left(a_{(k_1 k_2)(k k_2)} a_{(k_2 k_3)(k_2 k_3)} - a_{(k_1 k_2)(k_2 k_3)} a_{(k_2 k_3)(k k_2)}\right) = a_{k_2 k_2} a_{(k_1 k_2 k_3)(k k_2 k_3)} . \tag{11}$$

Dividendo ambo i membri per la quantità $a_{k_2 k_2} a_{(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)}$ che è positiva, perchè prodotto di due minori principali della matrice, la (10) diventa:

$$A_{ik_1} > \sum_{k}^{k \neq i, k_1, k_2, k_3} - \frac{a_{(k_1 k_2 k_3)(k k_2 k_3)}}{a_{(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)}} A_{ik} \tag{12}$$

dove la frazione $-\dfrac{a_{(k_1 k_2 k_3)(k k_2 k_3)}}{a_{(k_1 k_2 k_3)(k_1 k_2 k_3)}}$ è positiva.

La (12) è analoga alla (4), però nella sommatoria mancano altri due termini.

Ragioniamo ora per induzione. Supponiamo vera la (12) con l'esclusione di $m = \nu$ termini e dimostriamo che è vera anche con l'esclusione di $m = \nu + 1$ termini. Qualunque siano i $\nu$ numeri

([6]) G. Cimmino, *Analisi algebrica*, n. 29 pp. 45-46.

naturali $i$, $k_1$, $k_2, \ldots, k_{\nu-1}$ tutti diversi fra loro, si abbia allora per ipotesi:

$$(13) \qquad A_{ik_1} > \sum_{k}^{k \neq i, k_1, k_2 \ldots k_{\nu-1}} - \frac{a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(kk_2 \ldots k_{\nu-1})}}{a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})}} A_{ik}$$

dove gli $a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(kk_2 \ldots k_{\nu-1})}$ hanno sempre lo stesso significato dato loro nella (8) a pag. 2 della presente nota; e sono maggiori di zero per $k = k_1$ e minori di zero per $k \neq k_1$.

La (13) si può anche scrivere:

$$(14) \qquad A_{ik_1} > - \frac{a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_\nu k_2 \ldots k_{\nu-1})}}{a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})}} A_{ik_\nu} +$$

$$+ \sum_{k}^{k \neq i, k_1k_2 \ldots k_{\nu-1}k_\nu} - \frac{a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(kk_2 \ldots k_{\nu-1})}}{a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})}} A_{ik} .$$

Poichè dalla (13), sostituendo $k_\nu$ al posto di $k_1$, si ha che:

$$(15) \qquad A_{ik_\nu} > \sum_{k}^{k \neq i, k_\nu, k_2 \ldots k_{\nu-1}} - \frac{a_{(k_\nu k_2 \ldots k_{\nu-1})(kk_2 \ldots k_{\nu-1})}}{a_{(k_\nu k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_\nu k_2 \ldots k_{\nu-1})}} A_{ik}$$

risulta a maggior ragione:

$$(16) \qquad A_{ik_1} > \sum_{k}^{k \neq i, k_1, k_2 \ldots k_{\nu-1}k_\nu} - \frac{a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(kk_2 \ldots k_{\nu-1})}}{a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})}} A_{ik} +$$

$$+ \sum_{k}^{k \neq i, k_\nu, k_2 \ldots k_{\nu-1}} \frac{a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_\nu k_2 \ldots k_{\nu-1})} a_{(k_\nu k_2 \ldots k_{\nu-1})(kk_2 \ldots k_{\nu-1})}}{a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})} a_{(k_\nu k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_\nu k_2 \ldots k_{\nu-1})}} A_{ik}$$

Ora nella seconda sommatoria a secondo membro separiamo il termine che si ha per $k = k_1$, e portiamolo al primo membro, indi raccogliamo a secondo membro in una sommatoria unica e moltiplichiamo ambo i membri per il fattore positivo

$$a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})} a_{(k_\nu k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_\nu k_2 \ldots k_{\nu-1})}$$

otteniamo così, con opportuni scambi degli indici:

$$(17) \qquad (a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})} \cdot a_{(k_2 \ldots k_{\nu-1}k_\nu)(k_2 \ldots k_{\nu-1}k_\nu)} -$$

$$- a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_2 \ldots k_{\nu-1}k_\nu)} a_{(k_2 \ldots k_{\nu-1}k_\nu)(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})}) A_{ik_1} >$$

$$> \sum_{k}^{k \neq i, k_1, k_2 \ldots k_\nu} - a_{(k_2 \ldots k_\nu)(k_2 \ldots k_\nu)} a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(kk_2 \ldots k_{\nu-1})} -$$

$$- a_{(k_1k_2 \ldots k_{\nu-1})(k_2 \ldots k_{\nu-1}k_\nu)} a_{(k_2 \ldots k_{\nu-1}k_\nu)(kk_2 \ldots k_{\nu-1})}) A_{ik} .$$

Ma i coefficienti degli $A_{ik}$, per il teorema citato a pag. 3, possono porsi:

$$(a_{(k_2\dots k_\nu)(k_2\dots k_\nu)}a_{(k_1 k_2\dots k_{\nu-1})(kk_2\dots k_{\nu-1})} -$$

$$- a_{(k_1k_2\dots k_{\nu-1})(k_2\dots k_\nu)}a_{(k_2\dots k_\nu)(kk_2\dots k_{\nu-1})}) =$$

$$= a_{(k_2\dots k_{\nu-1})(k_2\dots k_{\nu-1})}a_{(k_1k_2\dots k_\nu)(k_1k_2\dots k_\nu)} \qquad k = k_1,\ k_{\nu+1},\ \dots\ k_n.$$

Dividendo allora ambo i membri della (17) per la quantità:

$$a_{(k_2\dots k_{\nu-1})(k_2\dots k_{\nu-1})}a_{(k_1k_2\dots k_\nu)(k_1k_2\dots k_\nu)}$$

positiva, perchè prodotto di due minori principali, otteniamo:

$$A_{ik_1} > \sum_{k}^{k \neq i,\, k_1,\, \dots\, k_\nu} - \frac{a_{(k_1k_2\dots k_\nu)(kk_2\dots k_\nu)}}{a_{(k_1k_2\dots k_\nu)(k_1k_2\dots k_\nu)}} A_{ik} \tag{18}$$

dove i coefficienti: $-\dfrac{a_{(k_1k_2\dots k_\nu)(kk_2\dots k_\nu)}}{a_{(k_1k_2\dots k_\nu)(k_1k_2\dots k_\nu)}}$ sono tutti positivi, perchè il numeratore della frazione è negativo, essendo una somma di termini negativi, e il denominatore è positivo essendo un minore principale.

Pertanto, se la diseguaglianza suddetta è vera per $m = \nu$ è vera anche per $m = \nu + 1$; poichè è vera per $m = 3$, sarà vera qualunque sia $m \leq n - 1$.

Prendendo la (18) per $m = n - 1$, quindi per $\nu = n - 2$, abbiamo:

$$A_{ik_1} > -\frac{a_{(k_1k_2\dots k_{n-2})(k_{n-1}k_2\dots k_{n-2})}}{a_{(k_1k_2\dots k_{n-2})(k_1k_2\dots k_{n-2})}} A_{ik_{n-1}}$$

e, scambiando $k_1$ con $k_{n-1}$:

$$A_{ik_{n-1}} < -\frac{a_{(k_{n-1}k_2\dots k_{n-2})(k_1k_2\dots k_{n-2})}}{a_{(k_{n-1}k_2\dots k_{n-2})(k_{n-1}k_2\dots k_{n-2})}} A_{ik_1}$$

da cui:

$$A_{ik_1}(a_{(k_1k_2\dots k_{n-2})(k_1k_2\dots k_{n-2})}a_{(k_2\dots k_{n-1})} -$$

$$- a_{(k_1k_2\dots k_{n-2})(k_2\dots k_{n-1})} \cdot a_{(k_2\dots k_{n-1})(k_1k_2\dots k_{n-2})}) > 0$$

cioè, sempre per il teorema citato a pag. 3:

$$A_{ik_1}a_{(k_2\dots k_{n-2})(k_2\dots k_{n-2})}a_{(k\ \dots k_{n-1})(k_1\dots k_{n-1})} > 0$$

Poichè la quantità: $a_{(k_2\dots k_{n-2})(k_2\dots k_{n-2})}a_{(k_1\dots k_{n-1})(k_1\dots k_{n-1})}$ è positiva, essendo il prodotto di due minori principali, abbiamo infine, dividendo per detta quantità:

$$A_{ik_1} > 0.$$

Il teorema risulta così provato.

3. La proposizione ora dimostrata, indipendente dal segno del determinante $A$ della matrice, afferma dunque che tutti i complementi algebrici $A_{ik}$ sono positivi sotto due sole ipotesi: la prima, coincidente con quella di DE RHAM, che siano negativi gli elementi non diagonali; la seconda che tutti i minori principali, fino a quelli di ordine $n-1$, siano positivi. Se aggiungiamo l'ulteriore ipotesi che sia $A>0$, ne discende che nell'equazione degli autovalori [7] vi sono tutte variazioni, e quindi tutti gli autovalori sono positivi [8]; ritroviamo pertanto le condizioni del DE RHAM.

Poichè gli autovalori di una matrice potrebbero essere tutti positivi anche se non fossero tali tutti i minori principali, dalla nostra proposizione non segue necessariamente il teorema di DE RHAM; viceversa, però, la nostra proposizione non è una conseguenza necessaria del teorema di DE RHAM, perchè non fa alcuna ipotesi sul segno del determinante $A$ della matrice.

Più in generale, prendendo come base della dimostrazione lo sviluppo di un determinante secondo la regola di LAPLACE [9], si può dimostrare, con considerazioni analoghe a quelle precedentemente usate, che:

*Se in una matrice reale di ordine* n *i minori non principali di ordine* $\nu$ *sono negativi, e tutti i minori principali di ordine* $r=\nu$, $\nu+1, \dots, n-1$ *sono positivi, allora saranno tali i complementi algebrici di tutti i minori di ordine* $\nu$.

(7) Cfr. pag. 1, della presente nota formula (1)

(8) Infatti l'equazione di grado $m$:

$$(*) \qquad a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

si può porre sotto la forma:

$$(**) \quad (a_0x^m + a_2x^{m-2} + \dots + a_m) + (a_1x^{m-2} + a_3x^{m-4} + \dots + a_{m-1})x = 0$$

per $m$ pari

oppure

$$(***) \quad (a_0x^{m-1} + a_2x^{m-3} + \dots + a_{m-1})x + (a_1x^{m-1} + a_3x^{m-3} + \dots + a_m) = 0$$

per $m$ dispari

Ora se si hanno fra i coefficienti tutte variazioni, o ciò che è lo stesso, se: $a_{2\nu}>0$, e $a_{2\nu+1}<0$, non vi può essere nessuna radice $\bar{x}$ negativa. Invero, se ve ne fosse una, e la sostituissimo nella (**) o nella (***), nel primo caso si otterebbe un valore positivo e nel secondo caso un valore negativo contrariamente all'ipotesi che la $\bar{x}$ sia radice dell'equazione (*).

(9) G. CIMMINO, *Analisi algebrica*, n. 27, pp. 40-41.