Tommaso Boggio

Sopra un teorema di Almansi relativo al problema biarmonico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.3, p. 369–376.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_3_369_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sopra un teorema di Almansi relativo al problema biarmonico.

Nota di TOMMASO BOGGIO (a Torino)

Sunto. - *Viene data una nuova semplice dimostrazione, mediante le variabili complesse, di un importante teorema di* ALMANSI *sul problema biarmonico.*

Summary. - *I give here a new simple demonstration, by means of the complex variables, of an important theorem of* ALMANSI *about the biharmonical problem.*

È ben nota l'importanza che ha, nella teoria matematica delle piastre elastiche piane, il problema biarmonico, che consiste, come si sa, nel trovare una funzione biarmonica, cioè che soddisfa entro un'area, all'equazione $\Delta_2\Delta_2 = 0$, supponendo di conoscere, sul contorno, i valori della funzione e della sua derivata secondo la normale, e ciò giustifica le ricerche compiute su questo problema, per suggerimento di VOLTERRA, da alcuni studiosi italiani, nei primi anni di questo secolo.

Tale problema si sa risolvere, con integrali definiti, come ho mostrato io (1), per tutte quelle aree di cui si può fare la rappresentazione conforme su un cerchio con funzioni razionali.

Anteriormente, con tutt'altro procedimento, ALMANSI (2) l'aveva risolto per le aree rappresentabili conformemente su un cerchio

(1) BOGGIO, *Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane*, « Atti Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », tomo LXI; parte seconda; a. 1901-902; vedasi anche la mia Nota, collo stesso titolo, negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXV, a. 1900.

(2) ALMANSI, *Integrazione della doppia equazione di Laplace*, « Rendiconti Accademia dei Lincei », vol. IX, serie 5ª, 1° semestre 1900.

mediante polinomi e aveva stabilito, al riguardo, un teorema molto notevole. I calcoli e gli artifici escogitati da ALMANSI sono molto ingegnosi, però la trattazione si può semplificare e rendere più limpida e completa utilizzando le prime proprietà fondamentali delle funzioni di variabile complessa, teoria che è specialmente indicata nelle questioni relative a funzioni armoniche; ciò mi propongo di mostrare in questa Nota, ove si trova altresì completato un punto importante della trattazione di ALMANSI, in quanto egli dimostra, verso la fine del suo lavoro, che un certo determinante A è *generalmente* diverso da zero (la qual cosa è indispensabile per la risoluzione) mentre io qui stabilisco che esso è *sempre* diverso da zero.

1. Colle notazioni di ALMANSI, diciamo S l'area piana che si considera, s il suo contorno, ed x, y le coordinate dei punti di S; dovremo allora determinare la funzione V, che soddisfa alle condizioni seguenti:

$$\Delta_2\Delta_2 V = 0, \qquad (\text{in } S), \qquad \left(\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$V = g, \qquad (\text{su } s),$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = g_1, \qquad (\text{su } s),$$

essendo g e g_1 funzioni note in ogni punto del contorno e che possiamo supporre funzioni dell'arco s del contorno stesso. In ogni punto del contorno avremo anche:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial s}, \qquad (\text{su } s)$$

e poichè su s si conosce pure $\frac{\partial V}{\partial n}$, potremo ritenere conosciute, in ogni punto di s, le derivate parziali di V, e porremo:

$$(1) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = g', \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = g'', \qquad (\text{su } s)$$

essendo g', g'' funzioni note dell'arco.

Determiniamo ora, mediante il problema di DIRICHLET, tre funzioni u, v, w, armoniche nell'area S e tali che sul contorno s si abbia:

$$(2) \qquad u = g', \qquad v = g'', \qquad w = g - xg' - yg''; \qquad (\text{su } s)$$

è chiaro che sul contorno s si avrà:

$$V = xu + yv + w, \qquad (\text{su } s)$$

onde in ogni punto di S potremo porre:

$$V = xu + yv + w + P, \tag{3}$$

ove P è una funzione da determinare, necessariamente biarmonica, essendo tali le funzioni V, xu, yv; essa dovrà soddisfare alle condizioni:

$$\Delta_2\Delta_2 P = 0, \qquad \text{(in } S\text{)},$$

$$P = 0, \qquad \text{(su } s\text{)} \tag{4}$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}(xu + yv + w), \qquad \text{(su } s\text{)}. \tag{5}$$

2. Per determinare la funzione P, facciamo la rappresentazione conforme dell'area S sul cerchio S_1, di raggio 1, col centro nella origine delle coordinate, che saranno indicate con x_1, y_1 e tale rappresentazione supponiamo che si possa fare colla formula

$$z = f(z_1),$$

ove

$$z = x + iy, \qquad z_1 = x + iy_1,$$

ed $f(z_1)$ è un polinomio di grado m in z_1; ciò equivale a supporre:

$$x = p_m(x_1, y_1), \qquad y = q_m(x_1, y_1),$$

essendo p_m e q_m polinomi armonici (coniugati) di grado m.

Si dovrà inoltre supporre che il determinante funzionale della trasformazione

$$\frac{d(x, y)}{d(x_1, y_1)}$$

(o, ciò che equivale, dz/dz_1) sia differente da zero anche sul contorno s.

Ciò posto, l'importante teorema di ALMANSI stabilisce che: *La funzione* P *è un polinomio di grado* 2m *nelle variabili* x_1, y_1. Per ottenere questa proprietà, trasformiamo le (4), (5); se t è una direzione qualunque, si ha dalla (3):

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} - \left(u\frac{\partial x}{\partial t} + v\frac{\partial y}{\partial t}\right) - \left(x\frac{\partial u}{\partial t} + y\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\right),$$

ma, tenendo conto delle (2), (1) risulta, nei punti di s:

$$u\frac{\partial x}{\partial t} + v\frac{\partial y}{\partial t} = g'\frac{\partial x}{\partial t} + g''\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t},$$

perciò rimane:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\left(x \frac{\partial u}{\partial t} + y \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\right), \qquad \text{(su } s\text{)}$$

e, in particolare, se la direzione t è quella della tangente al contorno, o quella della normale al contorno, risulta (essendo $\partial P/\partial s = 0$):

$$0 = \frac{\partial P}{\partial s} = -\left(x \frac{\partial u}{\partial s} + y \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial s}\right), \qquad \text{(su } s\text{)}$$

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial P}{\partial n} = -\left(x \frac{\partial u}{\partial n} + y \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial n}\right), \qquad \text{(su } s\text{)}$$

od ancora, passando dall'area S al cerchio S_1;

$$0 = \frac{\partial P}{\partial s_1} = -\left(x \frac{\partial u}{\partial s_1} + y \frac{\partial v}{\partial s_1} + \frac{\partial w}{\partial s_1}\right), \qquad \text{(su } s_1\text{)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial n_1} = -\left(x \frac{\partial u}{\partial n_1} + y \frac{\partial v}{\partial n_1} + \frac{\partial w}{\partial n_1}\right), \qquad \text{(su } s_1\text{)}$$

ove s_1 ed n_1 rappresentano la tangente e la normale interna alla circonferenza s_1 del cerchio S_1.

Indicando con a un intero positivo qualunque, si ha dalle relazioni precedenti:

$$(6) \qquad \int_{s_1} z_1^a \left(\frac{\partial P}{\partial n_1} + i \frac{\partial P}{\partial s_1}\right) ds_1 = -\int_{s_1} \left[x z_1^a \left(\frac{\partial u}{\partial n_1} + i \frac{\partial u}{\partial s_1}\right) + \right.$$
$$\left. + y z_1^a \left(\frac{\partial v}{\partial n_1} + i \frac{\partial v}{\partial s_1}\right) + z_1^a \left(\frac{\partial w}{\partial n_1} + i \frac{\partial w}{\partial s_1}\right)\right] ds_1$$

e per l'arbitrarietà dell'intero a, questa relazione equivale alle due precedenti.

3. Vogliamo ora far vedere che si può soddisfare alla (6), per ogni valore di a, ponendo

$$P = xp + q,$$

ove $p(x_1, y_1)$ e $q(x_1, y_1)$ sono polinomi armonici ed il primo di essi ha la forma:

$$(7) \qquad p = \Re(c_1 z_1 + c_2 z_1^2 + \ldots + c_m z_1^m),$$

ove le c sono costanti complesse da determinare ed $\Re f(z_1)$ indica la parte reale del numero complesso $f(z_1)$.

La funzione P così espressa risulta biarmonica in S e siccome sul contorno deve annullarsi, si deduce

$$xp + q = 0, \qquad (\text{su } s).$$

Sostituendo nella (6) a P il valore $xp + q$, si ottiene:

$$(6') \quad \int_{s_1} \left[x z_1^a \left(\frac{\partial p}{\partial n_1} + i \frac{\partial p}{\partial s_1} \right) + p z_1^a \left(\frac{\partial x}{\partial n_1} + i \frac{\partial x}{\partial s_1} \right) + z_1^a \left(\frac{\partial q}{\partial n_1} + i \frac{\partial q}{\partial s_1} \right) \right] ds_1 =$$

$$= - \int_{s_1} \left[x z_1^a \left(\frac{\partial u}{\partial n_1} + i \frac{\partial u}{\partial s_1} \right) + y z_1^a \left(\frac{\partial v}{\partial n_1} + i \frac{\partial v}{\partial s_1} \right) + z_1^a \left(\frac{\partial w}{\partial n_1} + i \frac{\partial w}{\partial s_1} \right) \right] ds_1 ;$$

ora indichiamo con f una funzione armonica di x_1, y_1 e trasformiamo l'espressione:

$$\frac{\partial f}{\partial n_1} + i \frac{\partial f}{\partial s_1} ;$$

si ha successivamente, indicando con r_1, θ_1 le coordinate polari del punto (x_1, y_1):

$$\frac{\partial f}{\partial n_1} + i \frac{\partial f}{\partial s_1} = - r_1 \frac{\partial f}{\partial r_1} + i \frac{\partial f}{\partial \theta_1} = - \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} \right) +$$

$$+ i \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = - (x_1 + i y_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} +$$

$$+ (x_1 + i y_1) \frac{\partial f}{\partial y_1} = - z_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - i \frac{\partial f}{\partial y_1} \right) ;$$

se poi f_0 è la funzione armonica coniugata di f, la $F = f + i f_0$ risulta funzione della variabile complessa $z = x_1 + i y_1$, e si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - i \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + i \frac{\partial f_0}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{dF}{dz_1} ,$$

e quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial n_1} + i \frac{\partial f}{\partial s_1} = - z_1 \frac{dF}{dz_1} .$$

In base a questa formula, osservando che

$$ds_1 = d\theta_1 = \frac{dz_1}{i z_1}$$

potremo scrivere la (6') più semplicemente così:

$$\int_{s_1}\left[x z_1{}^a \frac{dP(z_1)}{dz_1} + p z_1{}^a \frac{dz}{dz_1} + z_1{}^a \frac{dQ(z_1)}{dz_1}\right] dz_1 =$$

$$= -\int_{s_1}\left[x z_1{}^a \frac{dU(z_1)}{dz_1} + y z_1{}^a \frac{dV(z_1)}{dz_1} + z_1{}^a \frac{dW(z_1)}{dz_1}\right] dz_1 ,$$

ove P, Q, U, V, W sono funzioni della variabile complessa z_1, le cui parti reali sono rispettivamente p, q, u, v, w.

È utile osservare che gli integrali dei termini dove figurano le funzioni $Q(z_1)$ e $W(z_1)$ sono nulli, in virtù di un noto teorema di CAUCHY, perciò rimane:

$$(8)\quad \int_{s_1} x z_1{}^a \frac{dP(z_1)}{dz_1} dz_1 + \int_{s_1} p z_1{}^a \frac{dz}{dz_1} dz_1 = -\int_{s_1}\left[x z_1{}^a \frac{dU(z_1)}{dz_1} + y z_1{}^a \frac{dV(z_1)}{dz_1}\right] dz_1 ,$$

dove il secondo membro è quantità conosciuta.

4. È ora opportuno stabilire il seguente

LEMMA. – *Se la funzione* $\mathrm{f}(\mathrm{z}_1)$ *è regolare nel cerchio* S_1 *e* $\mathrm{p}(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ *è un polinomio armonico di grado* m, *si ha:*

$$(9)\qquad I = \int_{s_1} p z_1{}^a f(z_1) dz_1 = 0, \quad \text{per} \quad a \geq m .$$

Infatti, i termini del polinomio p sono combinazioni lineari di

$$r_1{}^n \cos n\theta_1 \quad \text{ed} \quad r_1{}^n \operatorname{sen} n\theta_1 , \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots , m)$$

cioè di $z_1{}^n$ e $\mathrm{K} z_1{}^n$ (³) e quindi sono della forma:

$$a_1 z_1{}^n + a_2 \mathrm{K} z_1{}^n ,$$

ove a_1, a_2 sono costanti; sostituendo e notando che su s_1 si ha $z_1 \mathrm{K} z_1 = 1$, risulta:

$$I = \sum_0^m a_1 \int_{s_1} z_1{}^{a+n} f(z_1) dz_1 + \sum_0^m a_2 \int_{s_1} z_1{}^{a-n} f(z_1) dz_1 ,$$

e per il già applicato teorema di CAUCHY, si ha $I = 0$ per $a \geq m$, come si è asserito.

(³) con $\mathrm{K}\alpha$ indichiamo il complesso coniugato di α.

Siccome gli integrali che figurano nella (8) sono del tipo (9), ne segue che per $a \geq m$ entrambi i membri della (8) si annullano, onde essa è verificata.

Trasformiamo la (8); essendo p data dalla (7) è chiaro che:

$$2p = P(z_1) + \mathrm{K}P(z_1), \quad \text{e così} \quad 2x = z + \mathrm{K}z, \ 2y = \mathrm{i}(\mathrm{K}z - z),$$

perciò sostituendo e omettendo dei termini nulli, in virtù del teorema di Cauchy, rimane:

$$(8') \qquad \int_{s_1} \mathrm{K}z \cdot z_1^a \frac{dP(z_1)}{dz_1} dz_1 + \int_{s_1} \mathrm{K}P(z_1) \cdot z_1^a \frac{dz}{dz_1} dz_1 =$$

$$= -\int_{s_1} \left[\mathrm{K}z \cdot z_1^a \frac{dU(z_1)}{dz_1} + \mathrm{i}\mathrm{K}z \cdot z_1^a \frac{dV(z_1)}{dz_1} \right] dz_1 ,$$

ove il secondo membro è del tutto conosciuto e può indicarsi con M_0.

Si ha:

$$P(z_1) = c_1 z_1 + c_2 z_1^2 + \ldots + c_m z_1^m,$$

e siccome x è (come p) un polinomio di grado m in x_1, y_1, si può porre, similmente:

$$z = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \ldots + a_m z_1^m,$$

ove le a_h sono costanti (complesse) conosciute, perciò il 1° termine della (8′), che indicheremo con I_a, può scriversi (omettendo dei termini nulli):

$$I_a = \int_{s_1} (\mathrm{K}a_1 \cdot \mathrm{K}z_1 + \mathrm{K}a_2 \cdot \mathrm{K}z_1^2 + \ldots + \mathrm{K}a_m \cdot \mathrm{K}z_1^m) \times$$

$$\times (c_1 z_1^a + 2c_2 z_1^{a-1} + \ldots + mc_m z_1^{a+m-1}) dz_1 ,$$

ponendo $a = 0$ ed osservando che

$$z_1 \mathrm{K}z_1 = 1, \ (\text{su } s_1), \quad \int_{s_1} \mathrm{K}z_1 dz_1 = 2\pi \mathrm{i}, \quad \int_{s_2} \mathrm{K}z_1^h dz_1 = 0, \ \text{per } h \neq 1,$$

si ha tosto:

$$I_0 = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{K}a_1 \cdot c_1 + 2\mathrm{K}a_2 \cdot c_2 + \ldots + m\mathrm{K}a_m \cdot c_m);$$

e per $a = 1, 2, \ldots, m-1$ si trova, analogamente:

$$I_1 = 2\pi\mathrm{i}[\mathrm{K}a_2 \cdot c_1 + 2\mathrm{K}a_3 \cdot c_2 + \ldots + (m-1)\mathrm{K}a_m \cdot c_{m-1}],$$
$$I_2 = 2\pi\mathrm{i}[\mathrm{K}a_3 \cdot c_1 + 2\mathrm{K}a_4 \cdot c_2 + \ldots + (m-2)\mathrm{K}a_m \cdot c_{m-2}],$$

. . . .

$$I_{m-1} = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{K}a_m \cdot c_1 ;$$

il secondo integrale della (8') si deduce dal primo scambiando semplicemente i coefficienti a_h coi coefficienti c_h, perciò dalla (8') e dalle equazioni precedenti si ricava:

$$2\pi i[Ka_1 \cdot c_1 + 2Ka_2 \cdot c_2 + \dots + mKa_m \cdot c_m + Kc_1 \cdot a_1 + 2Kc_2 \cdot a_2 + \\ + \dots + mKc_m \cdot a_m] = M_0,$$

$$2\pi i[Ka_2 \cdot c_1 + 2Ka_3 \cdot c_2 + \dots + (m-1)Ka_m \cdot c_{m-1} + Kc_2 \cdot a_1 + 2Kc_3 \cdot a_2 + \\ + \dots + (m-1)Kc_m \cdot a_{m-1}] = M_1,$$

$$2\pi i[Ka_3 \cdot c_1 + 2Ka_4 \cdot c_2 + \dots + (m-2)Ka_m \cdot c_{m-2} + Kc_3 \cdot a_1 + 2Kc_4 \cdot a_2 + \\ + \dots + (m-2)Kc_m \cdot a_{m-2}] = M_2,$$

. . . .

. . . .

$$2\pi i(Ka_m \cdot c_1 + Kc_m \cdot a_1) = M_{m-1};$$

abbiamo qui un sistema di m equazioni lineari fra m incognite complesse (le c_h), il che equivale ad un sistema di $2m$ equazioni lineari fra $2m$ incognite reali e il sistema è risolubile se il determinante dei coefficienti non è nullo.

Ma tale determinante è certamente diverso da zero, perchè se fosse nullo, supponendo nulle tutte le M, il sistema precedente sarebbe omogeneo e pertanto ammetterebbe soluzioni e allora esisterebbe un polinomio P non nullo; ma ciò è assurdo, perchè se si suppone $g=0$, $g'=0$, $g''=0$, si avrebbe $u=0$, $v=0$, $w=0$ e in virtù della (α) si avrebbe $\partial P/\partial n = 0$ e poi dalla (8') risulterebbe $M_0 = M_1 = \dots M_{m-1} = 0$; d'altra parte, la funzione biarmonica P, essendo nulla, colla sua derivata normale, sul contorno, dovrebbe essere identicamente nulla, in contraddizione con quanto abbiamo dianzi stabilito.

Dunque, la risoluzione del precedente sistema è sempre possibile; e si può notare che le incognite c_h dipendono solo dalle funzioni u e v (ma non da w).

Una volta ottenute le c_h, dovremo determinare la funzione q, che è armonica in S, e che sul suo contorno diventa eguale a $-xp$; passando al cerchio S_1, la q sul contorno s_1 dovrà coincidere col polinomio $p_m(x_1, y_1)p(x_1, y_1)$, che è di grado $2m$, ed è noto che la q pure risulterà, nel cerchio S_1, di grado $2m$ e così anche la funzione $P = xp + q$ sarà di grado $2m$ nelle variabili x_1, y_1, conforme al teorema di Almansi.