BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PAUL VINCENSINI

Sur la déformation de certains réseaux isogonaux d'une surface.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.3, p. 377–384.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_3_377_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Sur la déformation de certains réseaux isogonaux d'une surface (*).

Nota di PAUL VINCENSINI (à Marseille)

Sunto. - *In alcuni lavori precedenti, sono state studiate delle reti, tracciate su una superficie qualunque S, e caratterizzate da una certa proprietà invariante di fronte a una deformazione arbitraria di* S. *Questa Nota tratta delle circostanze geometriche che si presentano quando le reti in questione sono isogonali.*

1. - Les surfaces telles que les plans perpendiculaires aux segments déterminés par les différents couples de centres de courbure principaux associés (que nous dirons *segments focaux*) enveloppent une sphère (surfaces *à enveloppée focale moyenne sphérique*), jouent un rôle important en géométrie différentielle: ce sont celles que la méthode de WEINGARTEN associe à la déformation du paraboloïde de révolution.

Ces surfaces sont un cas particulier de celles pour lesquelles l'enveloppe des plans normaux aux différents segments focaux et partageant ces segments dans un rapport constant k enveloppent une sphère (surfaces *à enveloppée focale d'indice* k *sphérique*). Je voudrais montrer ici comment les surfaces générales à enveloppées focales d'indice k sphériques peuvent être mises en relation avec un problème relatif à la déformation, non plus du paraboloïde de révolution (point de vue de WEINGARTEN), mais de la *sphère*.

La question se rattache à la considération de certains réseaux d'une surface quelconque S, invariants par déformation arbitraire de S, que nous avons introduits et étudiés dans un travail antérieur [1], et dont nous allons tout d'abord rappeler la définition.

(*) Conferenza tenuta il 6 Maggio 1957 all'Istituto di Geometria "L. Cremona" dell'Università di Bologna.

[1] Voir par ex. P. VINCENSINI, *Sur certains cônes quadratiques issus des points d'une hypersurface de l'espace euclidien à* n *dimensions*, « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences », t. 226, (1948), p 1069-1071.

2. - A chaque point $P(u, v)$ d'une surface quelconque S rapportée à un système quelconque de coordonnées curvilignes (u, v), associons un point I du plan tangent en P, la loi d'association (P, I) étant continue et différentiable (jusqu'à l'ordre deux au moins), mais à part cela complètement arbitraire. Il existe sur S un réseau de courbes, en général unique (2), tel que lorsque P décrit une courbe quelconque de l'une ou l'autre famille du réseau les déplacements infinitésimaux correspondants des points P et I soient constamment orthogonaux, et ce réseau jouit de la propriété remarquable suivante.

Supposons chaque point I invariablement lié au plan tangent à la surface S au point P correspondant, et, dans ces conditions, déformons arbitrairement S, les plans tangents aux différents points P et par suite les points I associés étant entraînés dans la déformation. Au cours de cette déformation arbitraire, la relation d'orthogonalité existant entre les courbes du réseau précédemment défini sur S et les courbes homologues décrites par I *n'est pas altérée*, autrement dit, pour une loi d'association (P, I) *donnée,* ce sont toujours les mêmes courbes de S qui correspondent par orthogonalité des éléments linéaires aux courbes que la loi (P, I) leur associe. Nous dirons que le réseau envisagé est le *réseau invariant de* S *relatif à la loi d'association* (P, I) *choisie.*

Les réseaux invariants qui, comme il a été dit au numéro 1, interviennent dans le problème qui nous occupe, sont définis par une loi géométrique d'association (P, I) liée à la théorie des congruences de sphères, et cela conformément au procédé suivant:

Au point courant $P(u, v)$ d'une surface arbitraire S d'élément linéaire $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, centrons une sphère Σ de rayon $R(u, v)$; nous obtenons ainsi une congruence de sphères (Σ) de déférente S. La sphère Σ touche les deux nappes de son enveloppe en deux points M_1, M_2, symétriques par rapport au plan tangent en P à S, et il est bien connu que ces deux points conservent sur Σ des positions invariables lorsque la surface S se déforme arbitrairement en entraînant avec elle les sphères Σ centrées en ses différents points, les expressions vectorielles de M_1

(2) Il y a un cas exceptionnel fourni par les surfaces *applicables sur les surfaces spirales.* Si S est une telle surface, et si le point I associé au point courant P de S est le centre de courbure géodésique, relatif au point P, de la trajectoire orthogonale des spirales gauches déformées issue de P, le réseau en question est *indéterminé,* en ce sens que toute courbe décrite par P sur S correspond par orthogonalité des éléments linéaires à la courbe correspondante décrite par I.

et M_2 étant, pour chaque configuration de S [3]

$$(1) \qquad \begin{cases} \overrightarrow{M}_1 = \overrightarrow{P} - \Delta(\overrightarrow{P}, \rho) - \sqrt{2\rho - \Delta\rho} \cdot \overrightarrow{N}, \\ \overrightarrow{M}_2 = \overrightarrow{P} - \Delta(\overrightarrow{P}, \rho) + \sqrt{2\rho - \Delta\rho} \cdot \overrightarrow{N}. \end{cases}$$

où $\overrightarrow{N}$ est le vecteur unitaire normal en P à S, ρ un scalaire défini par l'égalité $R^2 = 2\rho$, $\Delta\rho$ le paramètre différentiel du premier ordre de BELTRAMI relatif au ds^2 de S, et $\Delta(\overrightarrow{P},\rho)$ le paramètre différentiel mixte de $\overrightarrow{P}$ et ρ relatif à ce même ds^2.

De la fixité des points M_1, M_2 sur Σ résulte l'invariabilité de la position de la droite M_1M_2 (corde des contacts de Σ) par rapport au plan tangent en P à S, et par suite du point I où M_1M_2 perce le plan tangent en P. Ce dernier point, milieu du segment M_1M_2, *peut donc servir à définir une loi d'association* (P, I) *invariante par déformation arbitraire de* S, et l'expression de cette loi est donnée par la formule

$$(2) \qquad \overrightarrow{I} = \frac{\overrightarrow{M}_1 + \overrightarrow{M}_2}{2} = \overrightarrow{P} - \Delta(\overrightarrow{P}, \rho).$$

L'équation du réseau invariant de S relatif à une loi d'association (P, I) *donnée* ($\rho =$ fonction donnée de u et de v), s'obtient en exprimant la nullité identique du produit scalaire des vecteurs $d\overrightarrow{P}$ et $d\overrightarrow{I}$:

$$(3) \qquad d\overrightarrow{P} \cdot d\overrightarrow{I} = 0;$$

soit en remplaçant $d\overrightarrow{I}$ par son expression déduite de (2)

$$d\overrightarrow{P} \cdot [d\overrightarrow{P} - d\Delta(\overrightarrow{P}, \rho)] = 0,$$

ou encore, en introduisant le ds^2 de S

$$(4) \qquad ds^2 - d\overrightarrow{P} \cdot d\Delta(\overrightarrow{P}, \rho) = 0.$$

Si l'on tient compte des relations bien connues

$$\frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Delta(\overrightarrow{P}, \rho)}{\partial u} = \rho_{11},$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Delta(\overrightarrow{P}, \rho)}{\partial v} = \frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \Delta(\overrightarrow{P}, \rho)}{\partial u} = \rho_{12},$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{P}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \Delta(\overrightarrow{P}, \rho)}{\partial v} = \rho_{22},$$

[3] Voir par ex. P. VINCENSINI, *Sur les congruences des cordes de contact des enveloppes de sphères*, « Ann. de l'Ec. Norm. Sup. » (3), LXI, (1944), p. 119.

où les ρ_{ij} sont les dèrivées secondes covariantes de la fonction $\rho(u, v)$ relatives au ds^2 de S, et si l'on représente la différentielle seconde covariante de ρ par $\delta^2\rho(\delta^2\rho = \rho_{11}du^2 + 2\rho_{12}dudv + \rho_{22}dv^2)$, l'équation (4) peut finalement s'écrire

$$ds^2 - \delta^2\rho = 0,$$

soit, en remplaçant ds^2 et $\delta^2\rho$ par leurs expressions

$$(E - \rho_{11})du^2 + 2(F - \rho_{11})dudv + (G - \rho_{22})dv^2 = 0. \tag{5}$$

3. - Nous allons maintenant porter plus spécialement l'attention sur ceux des réseaux invariants (5) pour lesquels les deux familles de courbes composantes se coupent, en chaque point de S, sous un angle constant $\alpha\left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$. Ces réseaux (réseaux invariants *isogonaux*) sont définis par une équation aux dérivées partielles du 2ème ordre invariante, qui, dans le cas particulier où S est à courbure totale constante positive, est susceptible d'une interprétation géométrique d'où l'on deduit aussitôt la relation, dont il a été question au n. 1, entre les surfaces applicables sur la sphère et les surfaces à enveloppées focales d'indice k sphériques.

L'équation définissant les fonctions ρ pour lesquelles le réseau (5) de S est formé de courbes se coupant sous l'angle constant α, est :

$$\frac{E + F(m_1 + m_2) + Gm_1m_2}{\sqrt{(E + 2Fm_1 + Gm_1^2)(E + 2Fm_2 + Gm_2^2)}} = \cos\alpha, \tag{6}$$

où m_1 et m_2 sont les deux racines de l'équation (5) où l'on a posé $\frac{dv}{du} = m$, à savoir

$$(G - \rho_{22})m^2 + 2(F - \rho_{12})m + E - \rho_{11} = 0. \tag{7}$$

En remplaçant dans (6) élevée au carré $m_1 + m_2$ et m_1m_2 respectivement par $\frac{-2(F - \rho_{12})}{G - \rho_{22}}$ et $\frac{E - \rho_{11}}{G - \rho_{22}}$, on constate, après un calcul sans difficultés, que cette équation peut s'écrire

$$\frac{(2 - \Delta_2\rho)^2}{(\Delta_2\rho)^2 - 4\Delta_{22}\rho} = \cos^2\alpha, \tag{8}$$

ce qui est l'équation aux dérivées partielles du 2ème ordre *invariante* à laquelle il a été fait allusion plus haut.

4. - Nous sommes maintenant en mesure d'obtenir l'intérprétation géométrique annoncée de l'équation (8), dans le cas particulier où S est applicable sur une sphère.

Rappelons tout d'abord le résultat suivant de la thèorie de la représentation sphérique des surfaces:

Θ étant une surface quelconque, effectuons la représentation sphérique de Θ sur la sphère σ de centre O et de rayon 1, et soient $M(u, v)$ et $P(u, v)$ un point quelconque de Θ et son image sur σ respectivement. Désignons par $h(u,v)$ la distance algébrique $\overline{OH}$, comptée suivant $\overrightarrow{OP}$, du point O au plan tangent en M à Θ, et par F_1 et F_2 les deux centres de courbure principaux situés sur la normale en M à Θ (laquelle est parallèle à OP), et par $f_1 = \overline{KF}_1$, $f_2 = \overline{KF}_2$ les abscisses des points F_1 et F_2, comptées positivement suivant $\overrightarrow{OP}$ à partir de la projection orthogonale K du point O sur cette normale.

Si Δh, $\Delta_2 h$ et $\Delta_{22} h$ sont les paramètres différentiels du premier et du deuxième ordre de la fonction $h(u, v)$, relatifs au ds^2 de la sphère σ sur laquelle le point courant a les mêmes coordonnées curvilignes u, v que le point M de Θ dont il est l'image, f_1 et f_2 sont les racines de l'équation du 2ème degrè en f

$$f^2 + \Delta_2 h \cdot f + \Delta_{22} h = 0 \quad (^4), \tag{9}$$

et de là résulte que, si ω est le milieu du segment F_1F_2, on a

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_2 h &= -(f_1 + f_2) = -2\overline{K\omega}, \\ \Delta_{22} h &= f_1 f_2 = \overline{KF}_1 \times \overline{KF}_2 . \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Cela étant, envisageons une surface quelconque S applicable sur une sphère, que pour plus de simplicité nous supposerons être la sphère σ de centre O et de rayon 1 dont il vient d'être question, et soit $\rho(u, v)$ une solution quelconque de l'équation (8) définissant, moyennant l'équation différentielle (5), les réseaux invariants isogonaux (sous l'angle α) de S. Supposons S appliquée sur σ, puis, $P(u, v)$ étant le point courant de σ, portons sur $\overrightarrow{OP}$ le vecteur $\overrightarrow{OH} = \rho\overrightarrow{OP}$, et menons en H le plan π perpendiculaire à OH. Lorsque u et v varient π enveloppe une certaine surface Θ, qu'il touche en un certain point M (dont P est l'image sphérique sur σ). Et la fonction ρ, qui donne le rayon R ($R^2 = 2\rho$) de la sphère Σ à centrer sur σ pour que la loi d'association (P, I) correspondante (*voir* le n. 2) définisse un réseau invariant isogonal de σ (et de ses déformées), représente en même temps la distance h du point O au plan tangent en M à Θ.

(4) Voir P. VINCENSINI, *Sur certaines congruences de normales dans leurs relations avec les surfaces à courbure totale constante et leurs transformations,* « Ann. de l'Ec. Norm. Sup. », (3), XLVIII, 1931, p. 399.

F_1, F_2, K et ω ayant sur la normale en M à Θ les significations précédement indiquées, on a donc, d'après les relations (10) où h est remplacé par ρ:

$$\Delta_2\rho = -2\overline{K\omega}, \qquad \Delta_{22}\rho = \overline{KF_1} \times \overline{KF_2}, \tag{11}$$

ρ étant solution de l'équation (8); et si l'on tient compte des relations (11), l'équation (8) s'écrit

$$\frac{(1+\overline{K\omega})^2}{\overline{\omega F_1}^2} = \cos^2 \alpha.$$

En introduisant le point I d'abscisse $\overline{KI} = -1$ sur la normale en M à Θ, on peut, comme on le constate sans difficulté et en désignant par F_1 le centre de courbure principal le plus rapproché de I, mettre l'équation précédente sous la forme entièrement géométrique

$$\frac{\overline{IF_1}}{\overline{IF_2}} = -tg^2\frac{\alpha}{2}, \tag{12}$$

qui prouve que le point I *partage le segment focal* F_1F_2 *dans un rapport constant.*

D'autre part, le plan $\mathcal{P}$ normal à la droite F_1F_2 en I est à la distance unité du point K, donc aussi du point O, et *est par suite tangent à la sphère* σ.

De là résulte que la surface Θ précédentement introduite est (*voir* le n. 1) une *surface à enveloppée focale d'indice* k *sphérique* $\left(k \text{ ayant la valeur } -tg^2\frac{\alpha}{2}\right)$ (⁵).

Le problème de la recherche des réseaux invariants isogonaux (sous un angle donné α) d'une surface S applicable sur la sphère σ *est donc équivalent à celui de la détermination des surfaces* Θ *admettant* σ *pour enveloppée focale d'indice* $\mathrm{k} = -tg^2\frac{\alpha}{2}$.

Si l'on déforme S de façon à l'appliquer sur σ, et si l'on adopte les mêmes coordonnées curvilignes (u, v) pour désigner un point quelconque de S et le point correspondant de σ, il suffit de choisir, pour ρ, la distance du centre O de σ au plan tangent à l'une quelconque des surfaces Θ au point d'image sphérique (u, v), pour avoir

(⁵) Il est clair que les deux familles de surfaces Θ correspondant à deux valeurs inverses de k sont les mêmes.

la fonction $\rho(u, v)$ qui, moyennant l'équation (5), définit le réseau invariant de S le plus général du type envisagé.

5. - Revenons au cas général où S est une surface quelconque (et non plus nécessairement une déformée de la sphère), et plaçons nous dans les cas extrêmes où α a les valeurs 0 ou $\frac{\pi}{2}$.

Si $\alpha = 0$ les deux familles de courbes qui constituent le réseau invariant se réduisent à une seule (faisceau invariant *double*) et l'équation (8) qui définit les lois d'association donnant lieu à cette particularité s'écrit

$$\Delta_{22}\rho - \Delta_2\rho + 1 = 0. \tag{13}$$

On a là une équation du type de *Monge-Ampère* qui, lorsque S est *développable*, n'est pas autre chose que la *deuxième équation de l'applicabilité de* S. Le problème de la détermination des réseaux invariants du type actuel est donc, pour les surfaces développables, équivalent au problème de la déformation de ces surfaces, et peut par suite être résolu complètement. Il est d'ailleurs facile de constater que les différentes familles de ∞^1 courbes d'un faisceau invariant double du type en question *sont des géodésiques* de la développable envisagée, toute famille de ∞^1 géodèsiques d'une développable étant susceptible de ce mode de définition.

Si, toujours dans le cas où $\alpha = 0$, S est applicable sur une sphère σ de rayon 1, et si l'application est supposée effectivement réalisée, (12) montre que I est confondu avec l'un, F_1, des centres de courbure principaux de la surface Θ introduite au n. 4; le plan P perpendiculaire en F_1 à la normale au point courant de Θ est alors tangent à la sphère σ; Θ est par suite une surface quelconque telle que les plans perpendiculaires à ses normales en l'*un* des centres de courbure principaux enveloppent une sphère. En appelant *enveloppées focales limites* d'une surface les enveloppes des plans perpendiculaires à la normale au point courant en l'un ou l'autre des deux centres de courbure principaux, on peut dire que le problème de la recherche des faisceaux invariants doubles des surfaces à courbure totale constante positive *est équivalent à celui de la recherche des surfaces dont l'une des deux enveloppées focales limites est une sphére.*

Plaçons nous maintenant dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$; l'équation (8) se réduit alors à

$$\Delta_2\rho = 2. \tag{14}$$

(14) est de la forme

$$G\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} - 2F\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + E\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} + \alpha\frac{\partial \rho}{\partial u} + \beta\frac{\partial \rho}{\partial v} + \gamma = 0;$$

l'équation de ses caractéristiques est celle des lignes de longueur nulle de S, l'intégration pourra par suite être effectuée complètement si la détermination de ces dernières lignes est possible.

Un cas simple où il en est ainsi est celui où S est développable. Si l'élément linéaire est ramené à la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

l'équation (14) s'écrit

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = 2, \tag{15}$$

et il suffit de faire le changement de fonction défini par $\lambda = \rho - \frac{u^2+v^2}{2}$, pour transformer (15) en l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} = 0,$$

qui définit λ comme la fonction harmonique la plus générale.

Un autre cas intéressant est fourni par la sphère, qui admet ses deux systèmes de génératrices rectilignes comme lignes de longueur nulle. Pour une telle surface on pourra donc effectuer complètement la détermination des réseaux invariants orthogonaux du type qui nous occupe.

Si la sphère envisagée est la sphère σ de rayon 1 du n. 4, l'équation $\Delta_2\rho = 0$ [ou la forme équivalente (12) où $\alpha = 0$], montre que le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire en I à F_1F_2 est le plan médiateur du segment F_1F_2: les surfaces Θ associées à σ pour la détermination de ses réseaux invariants orthogonaux sont donc *les surfaces à enveloppée focale moyenne sphérique*.

Ces surfaces sont, comme nous l'avons dit au n. 1, celles à la détermination desquelles Weingarten a ramené le problème de la déformation du paraboloïde de révolution. Il est bien connu que leur détermination peut être faite complètement, et il n'est pas sans interêt de noter comment, grâce à la considération des réseaux invariants orthogonaux de la sphère, on peut avoir une nouvelle preuve de cette possibilité.