Bollettino Unione Matematica Italiana

Silvio Cinquini

Un'osservazione sopra le estremaloidi dei problemi variazionali di ordine n.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.3, p. 385–393.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_3_385_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Un'osservazione sopra le estremaloidi dei problemi variazionali di ordine n.

Nota di SILVIO CINQUINI (a Pavia)

Sunto. - *Si ritorna su una condizione sufficiente, affinchè sia lipschitziana la derivata di ordine* n — 1 *della funzione da cui è definita un'estremaloide relativa ai problemi variazionali di ordine* n *in forma ordinaria, mettendo in luce, mediante un esempio, la diversità che presenta il caso* n > 1 *in confronto a* n = 1. *Si fanno analoghe considerazioni sulle pseudoestremaloidi dei problemi in questione.*

Resumé. - *Il s'agit d'un remarque sur une condition suffisante afin que la derivée d'ordre* n — 1 *d'une extremaloïde, relative aux problèmes du calcul des variations d'ordre* n, *soit à rapport incremental borné: un exemple éclaire la difference qu'il y a entre les cas* n > 1 *et* n = 1. *On fait le remarque analogue pour les pseudoestremaloïdes des problèmes en question.*

Alcuni recenti risultati sulle estremaloidi relative a integrali curvilinei in forma parametrica [1] dipendenti dagli elementi differenziali di ordine superiore ci inducono a ritornare brevemente sui problemi in forma ordinaria, i quali hanno come oggetto l'esistenza dell'estremo assoluto degli integrali [2]

$$I_{C[n]}^{[n]} = \int_a^b f\left(x,\ y(x),\ \frac{dy(x)}{dx}, \dots, \frac{d^n y(x)}{dx^n}\right) dx,$$

per rilevare, mediante un esempio, un'ulteriore diversità che sussiste nel caso $n > 1$ in confronto a $n = 1$.

Sono ben note, per $n = 1$, condizioni sufficienti, affinchè una estremaloide relativa alla funzione $f(x, y, y')$ sia a rapporto incre-

(1) S. CINQUINI, *Sopra le estremali di una classe di problemi variazionali. Sopra le estremaloidi di una classe di problemi variazionali.* Entrambe le Note sono in corso di stampa nei « Rend. Accademia Nazionale dei Lincei », serie VIII, vol. XXIII, (1957).

(2) Dei nostri lavori su tale argomento citiamo soltanto i seguenti: S. CINQUINI, *Sopra le equazioni di Eulero dei problemi variazionali di ordine* n, « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, T. XVI, (1937), pp. 61-100. *Le pseudoestremaloidi dei problemi variazionali di ordine* n. « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », serie II, vol. VII, (1938), pp. 195-204.

mentale limitato: una di queste condizioni ([3]) si riferisce al caso in cui la funzione $f(x, y, y')$ è indipendente da y, ed è valida quando: 1°) in ogni campo limitato del piano (x, y) $f_{y'}(x, y')$ tende uniformemente, per $|y'| \to \infty$, a un limite l (indipendente da x); 2° esiste un $Y' > 0$ tale che, per ogni valore finito di y' con $|y'| > Y'$, è $f_{y'}(x, y') \neq l$.

In queste righe facciamo presente che la condizione analoga a quella ora citata non è senz'altro valida per $n > 1$, ove, bene inteso, la funzione $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ dipende soltanto da x e $y^{(n)}$. Pertanto al n. 2 rileviamo una nuova proposizione, mettendo in luce, mediante un esempio (*n.* 3, a)), che, se non è verificata la condizione che sostituiamo alla 2°), il teorema del n. 2 può cadere in difetto.

Questa osservazione si estende alle pseudoestremaloidi di ordine n (n. 4), e anche in questo caso viene illustrata da un esempio (n, 5, a)).

1. Generalità. - Per tutte le generalità rinviamo ai nostri lavori citati in ([2]), limitandoci a ricordare che si considerano le curve

$$C_{[n]}: \qquad y = y(x), \qquad (a \leq x \leq b),$$

per le quali la funzione $y(x)$ è assolutamente continua assieme alle proprie derivate dei primi $n-1$ ordini $y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$, ogni punto $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$, $(a \leq x \leq b)$ appartiene a un dato campo $A^{[n]}$ ad $n+1$ dimensioni ed esiste finito l'integrale ([4])

$$I^{[n]}_{C^{[n]}} = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))dx,$$

ove $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ è una funzione definita e continua in ogni punto $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ di $A^{[n]}$ e per ogni valore finito di $y^{(n)}$.

Se la funzione f dipende soltanto dalle variabili x e $y^{(n)}$ [e sotto l'ipotesi che esista finita e continua la derivata parziale $f_{y^{(n)}}(x, y^{(n)})$ e che la funzione $f_{y^{(n)}}(x, y^{(n)}(x))$ sia integrabile in $(a. b)$] l'equa-

([3]) L. Tonelli, *Sulle proprietà delle estremanti*, « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », serie II, vol. III, (1934), pp. 213-237. Per l'enunciato completo del teorema accennato nel testo vedi cap. I, nn. 5 e 6, pag. 222.

([4]) Nella presente Nota l'integrabilità è intesa nel senso di Lebesgue.

zione delle estremaloidi di ordine n [5] si riduce a

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f_{y^{(n)}}(x,\ y^{(n)}(x))dx = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1}. \tag{1}$$

ove $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ sono n costanti.

Se la funzione f dipende soltanto dalle variabili $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$, [e sotto l'ipotesi che esista finita e continua la derivata parziale $f_{y^{(n)}}(y^{(n-1)}, y^{(n)})$ e che l'espressione $f(y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) - y^{(n)}(x)f_{y^{(n)}}(y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x))$, sia integrabile in (a, b)], l'equazione delle pseudoestremaloidi di ordine n [6] si riduce a

$$\frac{d}{dx}\int_a^x [f(y^{(n-1)}(x),\ y^{(n)}(x)) - y^{(n)}(x)f_{y^{(n)}}(y^{(n-1)}(x),\ y^{(n)}(x))]dx = \gamma + \int_a^x P(x)y^{(n)}(x)dx, \tag{2}$$

ove γ è una costante e $P(x)$ è un polinomio di grado $n-2$; in particolare, per $n = 1$ è $P(x) \equiv 0$.

2. Teorema. – *Supponiamo che esista un numero finito* l (*indipendente da* x) *in modo che, in ogni campo limitato* $A_L^{[n]}$ *appartenente ad* $A^{[n]}$, $f_{y^{(n)}}(x, y^{(n)})$ *tenda uniformemente a* l *per* $y^{(n)} \to +\infty$ $[y^{(n)} \to -\infty]$.

Se

$$y = y_1(x), \qquad (a \leq x \leq b)$$

è un'estremaloide di ordine n *appartenente ad* $A^{[n]}$, *relativa alla funzione* $f(x, y^{(n)})$ *e alle costanti* $c'_0, c'_1, \ldots, c'_{n-1}$, *e tale che per tutti gli* x *di* (a, b) *sia*

$$c'_0 + c'_1 x + \ldots + c'_{n-1} x^{n-1} \neq l, \tag{3}$$

allora la derivata di ordine $n-1$ *di* $y_1(x)$ *è a rapporto incrementale superiormente [inferiormente] limitato* [7].

Per fissare le idee ci riferiamo al caso, in cui $x^{(n)} \to +\infty$.

[5] Vedi luogo cit. per primo in [2], n. 6, α), pag. 75.

[6] Vedi luogo cit. per secondo in [2], n. 2, pp. 197-8.

[7] Questa proposizione precisa l'osservazione che figura al n. 8, β) del lavoro citato per primo in [2].

Tenuto presente che dalla (1) segue per quasi tutti gli x di (a, b)

(4) $$f_{y^{(n)}}(x, y_1^{(n)}(x)) = c'_0 + c'_1 x + \dots + c'_{n-1} x^{n-1},$$

siano m e M il minimo e il massimo del polinomio, che figura al secondo membro della (4), al variare di x in (a, b). In virtù della (3) è o $l > M$ oppure $m > l$; indichiamo con σ rispettivamente o $l - M$ oppure $m - l$, rilevando che in tutto (a, b) è

$$| c'_0 + c'_1 x + \dots + c'_{n-1} x^{n-1} - l | \geq \sigma.$$

D'altra parte l'estremaloide considerata è contenuta in almeno un campo limitato $A_L^{[n]}$ in corrispondenza al quale esiste un $H > 0$ in modo che, per qualunque $y^{(n)} > H$, risulta in tutto $A_L^{[n]}$

$$| f_{y^{(n)}}(x, y^{(n)}) - l | < \sigma.$$

Pertanto dalla (4) si conclude che in quasi tuttto (a, b) è

$$y_1^{(n)}(x) \leq H,$$

vale a dire è così provato che $y_1^{(n-1)}(x)$ è a rapporto incrementale superiormente limitato.

3. Osservazione. Esempi. – a) *Se anche per un solo* x *di* (a, b) *non è verificata la disuguaglianza* (3), *il teorema del n.* 2 *può non essere valido*, come mostra il seguente esempio.

Sia $n = 2$,

$$f(x, y'') = \sqrt{1 + y''^2}.$$

Essendo

$$f_{y''}(x, y'') = \frac{y''}{\sqrt{1 + y''^2}},$$

ogni estremaloide di ordine 2 soddisfa per quasi tutti gli x alla equazione differenziale

(5) $$\frac{y''}{\sqrt{1 + y''^2}} = c_0 + c_1 x,$$

ove c_0, c_1 sono due costanti; inoltre è evidentemente

(6) $$\lim_{y'' \to +\infty} f_{y''}(x, y'') = 1, \qquad \lim_{y'' \to -\infty} f_{y''}(x, y'') = -1.$$

Dalla (5) segue

(5') $$y'' = \frac{c_0 + c_1 x}{\sqrt{1 - (c_0 + c_1 x)^2}},$$

e quindi, per $c_1 \neq 0$, integrando

$$(7) \qquad y = -\frac{1}{2c_1^2}[\operatorname{arc\,sen}(c_0+c_1x)+(c_0+c_1x)\sqrt{1-(c_0+c_1x)^2}]+c_2x+c_3,$$

con c_2, c_3 costanti, e ove il secondo membro è funzione assolutamente continua assieme alla propria derivata del primo ordine nel rispettivo intervallo

$$(8) \qquad -1 \leq c_0 + c_1x \leq 1.$$

Per la (5') è evidente che su ogni estremaloide di ordine 2 definita dalla (7) la $y''(x)$ non è limitata nè inferiormente nè superiormente: ciò dipende dal fatto che il secondo membro della (5) assume nei punti terminali dell'intervallo (8) i valori che figurano al secondo membro delle (6). Facciamo rilevare che, d' altra parte, per qualunque valore finito di y'' è $f_{y''}(x, y'') \neq 1$, $f_{y''}(x, y'') \neq -1$; cioè a dire è verificata l'analoga dell'ipotesi che si fa per $n = 1$.

b) Il teorema del n. 2 si applica ai seguenti esempi:

1°) Sia $n = 3$,

$$f(x, y''') = y''' + \operatorname{arctg} y'''.$$

Siccome

$$f_{y'''}(x, y''') = 1 + \frac{1}{y'''^2 + 1},$$

l'equazione delle estremaloidi di ordine 3 è per quasi tutti gli x

$$(9) \qquad 1 + \frac{1}{y'''^2 + 1} = c_0 + c_1x + c_2x^2;$$

consideriamo quelle estremaloidi, per le quali le costanti c_0, c_1, c_2 soddisfano alle disuguaglianze

$$(10) \qquad c_2 > 0,$$

$$(11) \qquad c_1^2 - 4c_0c_2 + 4c_2 < 0,$$

$$(12) \qquad c_1^2 - 4c_0c_2 + 8c_2 > 0.$$

rilevando, innanzi tutto, che tali disuguaglianze sono compatibili, perchè, in virtù della (10), le ultime due equivalgono alla doppia disuguaglianza

$$1 + \frac{c_1^2}{4c_2} < c_0 < 2 + \frac{c_1^2}{4c_2}.$$

Le (10) e (11) ci assicurano che il secondo membro della (9) è sempre maggiore di 1; d'altra parte in virtù delle (10) e (12) esiste un intervallo di ampiezza positiva

$$(13)\qquad \left(\frac{-c_1-\sqrt{c_1^2-4c_0c_2+8c_2}}{2c_2},\qquad \frac{-c_1+\sqrt{c_1^2-4c_0c_2+8c_2}}{2c_2}\right),$$

nel quale il secondo membro della (9) è non maggiore di 2, vale a dire nel rispettivo intervallo (13) esistono effettivamente estremaloidi di ordine 3, sulle quali, per il teorema del n. 2, $y''(x)$ è a rapporto incrementale limitato, perchè è

$$\lim_{|y'''|\to\infty} f_{y'''}(x,\ y''')=1,$$

e, come abbiamo sopra rilevato, il valore 1 non viene mai assunto dal secondo membro della (9).

2°) Sia $n=2$,

$$f(x,\ y'')=y''+(x-\operatorname{sen} x)\operatorname{arctg} y'';$$

pertanto

$$f_{y''}(x,\ y'')=1+\frac{x-\operatorname{sen} x}{1+y''^2},$$

e anche

$$\lim_{|y''|\to\infty} f_{y''}(x,\ y'')=1$$

uniformemente, quando x varia in un intervallo limitato.

Consideriamo, in uno qualunque degli intervalli

$$(14)\qquad \begin{cases} (2k-1)\pi\le x\le 2k\pi, & (k=1,\ 2,\ldots)\\ 2h\pi\le x\le(2h+1)\pi, & (h=-1,\ -2,\ldots),\end{cases}$$

le estremaloidi di ordine 2 definite per quasi tutti gli x da

$$f_{y''}(x,\ y'')=1+x,$$

vale a dire, a riduzioni fatte,

$$y''^2=-\frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

In base al teorema del n. 2 in uno qualunque degli intervalli (14) la $y'(x)$ di ciascuna delle estremaloidi considerate è a rapporto incrementale limitato, come del resto è ben evidente: è pure ovvio che ciascuno degli intervalli (14) è il massimo intervallo, in cui è definita ogni estremaloide considerata.

c) Si può soggiungere che la proposizione del n. 2 si presenta, anche nel caso particolare $n = 1$, sotto forma un po' diversa dallo enunciato del teorema di TONELLI citato in ([3]).

Infatti, tenuto presente che, per $n = 1$, la (1) si riduce per quasi tutti gli x a

$$f_{y'}(x,\ y_1'(x)) = c_0',$$

nel nostro teorema figura l'ipotesi $l \neq c_0'$, mentre in quello di TONELLI si suppone che sia $f_{y'}(x,\ y') \neq l$ per tutti gli y' maggiori [minori] di un opportuno Y'.

4. TEOREMA. – *Supponiamo che esista un numero finito* l *(indipendente da* $y^{(n-1)}$*) in modo che, in ogni campo limitato* $A_L^{[n]}$ *appartenente ad* $A^{[n]}$*, la differenza* $f(y^{(n-1)},\ y^{(n)}) - y^{(n)} f_{y^{(n)}}(y^{(n-1)},\ y^{(n)})$ *tenda uniformemente a* l *per* $y^{(n)} \to +\infty$ $[y^{(n)} \to -\infty]$.

Se

$$y = y_1(x), \qquad (a \leq x \leq b)$$

è una pseudoestremaloide di ordine n*, appartenente ad* $A^{[n]}$*, relativa alla funzione* $f(y^{(n-1)},\ y^{(n)})$*, alla costante* γ_0 *e al polinomio* $P_0(x)$ *di grado* $n-2$ *e tale che per tutti gli* x *di* $(a,\ b)$ *sia*

$$\gamma_0 + \int_a^x P_0(x) y_1^{(n)}(x) dx \neq l, \tag{15}$$

allora la derivata di ordine $n-1$ *di* $y_1(x)$ *è a rapporto incrementale superiormente [inferiormente] limitato* ([8]).

Infatti necessariamente l'estremaloide considerata è contenuta in almeno un campo limitato $A_L^{[n]}$. Dalla (2) segue per quasi tutti gli x di $(a,\ b)$

$$f(y_1^{(n-1)}(x),\ y_1^{(n)}(x)) - y_1^{(n)}(x) f_{y^{(n)}}(y_1^{(n-1)}(x),\ y_1^{(n)}(x)) = \tag{16}$$

$$= \gamma_0 + \int_a^x P_0(x) y_1^{(n)}(x)\, dx,$$

e pertanto, indicati con m e M il minimo e il massimo del secondo membro della (16) al variare di x in $(a,\ b)$, basta ragionare come al n. 2.

([8]) Questa proposizione viene enunciata soltanto nella presente Nota, per quanto la sua esistenza fosse già prevista al n. 4, α) del lavoro citato per secondo in ([2]).

5. Osservazione. Esempi. – a) *Se anche per un solo* x *di* (a, b) *non è verificata la disuguaglianza* (15), *il teorema del n.* 4 *può non essere valido,* come risulta dal seguente esempio.

Sia $n = 2$,

$$f(y', y'') = \sqrt{1 + y''^2};$$

è

$$f(y', y'') - y'' f_{y''}(y', y'') = \frac{1}{\sqrt{1 + y''^2}},$$

$$\lim_{|y''| \to \infty} [f(y', y'') - y'' f_{y''}(y', y'')] = 0.$$

Per quasi tutti gli x l'equazione delle pseudoestremaloidi di ordine 2 si può porre sotto la forma [9]

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y''^2}} = k_0 + k_1 y', \tag{17}$$

con k_0, k_1 costanti; assumiamo $k_1 \neq 0$.

Ogni funzione

$$y = \frac{k_0}{k_1^2}(k_2 - k_1 x) - \tag{18}$$

$$- \frac{1}{2k_1^2}\left[\operatorname{arctg} \frac{k_2 - k_1 x}{\sqrt{1 - (k_2 - k_1 x)^2}} + (k_2 - k_1 x)\sqrt{1 - (k_2 - k_1 x)^2}\right] + k_3,$$

ove k_2, k_3 sono altre due costanti, è nel rispettivo intervallo

$$-1 \leq k_2 - k_1 x \leq 1 \tag{19}$$

un integrale della (17); è evidente che la (18) è assolutamente continua insieme con la propria derivata del primo ordine

$$y' = -\frac{k_0}{k_1} + \frac{1}{k_1}\sqrt{1 - (k_2 - k_1 x)^2}.$$

Ma, essendo

$$y'' = \frac{k_2 - k_1 x}{\sqrt{1 - (k_2 - k_1 x)^2}},$$

il rapporto incrementale della derivata del primo ordine di ciascuna delle pseudoestremaloidi di ordine 2 definite dalla (18) non

(9) Si tenga presente l'Osservazione che figura alla fine del n. 2 (pag. 198) del nostro lavoro citato per secondo in (2).

è limitato nè superiormente nè inferiormente: ciò dipende dal fatto che nei punti terminali dell'intervallo (19) non ha luogo la (15), essendo $k_0 + k_1 y' = 0$. Facciamo rilevare che, d'altra parte, per qualunque valore finito di y'' è $f(y', y'') - y'' f_{y''}(y', y'') \neq 0$, vale a dire è verificata l'analoga dell'ipotesi che si fa per $n = 1$ ([10])

b) Il teorema del n. 4 si applica al seguente esempio:

Sia $n = 2$,

$$f(y', y'') = y'' + \operatorname{arctg} y'' ;$$

è

$$f(y', y'') - y'' f_{y''}(y', y'') = \operatorname{arctg} y'' - \frac{y''}{1 + y''^2},$$

il cui limite è $\frac{\pi}{2}$ per $y'' \to +\infty$, e $-\frac{\pi}{2}$ per $y'' \to -\infty$.

Per quasi tutti gli x l'equazione delle pseudoestremaloidi di ordine 2 si riduce a

$$\operatorname{arctg} y'' - \frac{y''}{1 + y''^2} = k_0 + k_1 y', \tag{20}$$

con k_0, k_1 costanti. Considerato $k_1 \neq 0$, ogni funzione avente come derivata del primo ordine

$$y'(x) = -\frac{k_0}{k_1} + \frac{1}{k_1}\left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - (k_2 - k_1 x)}{k_2 - k_1 x}} - \sqrt{[1 - (k_2 - k_1 x)](k_2 - k_1 x)}\right],$$

con k_2 costante, soddisfa alla (20) nell'intervallo $0 \leq k_2 - k_1 x \leq 1$, e siccome su ognuna di tali estremaloidi di ordine 2 è sempre $k_0 + k_1 y' \neq -\frac{\pi}{2}$, in base al teorema del n. 4 la $y'(x)$ è a rapporto incrementale inferiormente limitato, come del resto è evidente essendo

$$y''(x) = \sqrt{\frac{1 - (k_2 - k_1 x)}{k_2 - k_1 x}} .$$

c) Si può fare un'osservazione analoga a quella del n. 3, c), confrontando il caso particolare della proposizione del n. 4 che si ha per $n = 1$, con il teorema stabilito da Tonelli ([11]).

([10]) Vedi L. Tonelli, luogo cit. in ([3]) n. 14, pp. 230-1.

([11]) Vedi luogo cit. in ([10]).