Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuliano Toraldo di Francia

Sulla traiettoria ottima di un missile leggero, soggetto a una resistenza quadratica, funzione esponenziale dell'altezza.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.3, p. 401–410.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_3_401_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Sulla traiettoria ottima di un missile leggero, soggetto a una resistenza quadratica, funzione esponenziale dell'altezza.

Nota di Giuliano Toraldo di Francia (a Firenze)

Sunto. - *Si assegna come funzione del tempo la direzione che deve avere la forza propulsiva affinché sia massima la gittata di un missile puntiforme soggetto a resistenza quadratica, dipendente esponenzialmente dall'altezza, quando il peso è trascurabile rispetto alla forza e alla resistenza. In questa approssimazione le traiettorie di gittata massima corrispondenti a diverse determinazioni della forza propulsiva in funzione del tempo sono tutte eguali e si ottengono l'una dall'altra per semplice traslazione.*

Summary. - *The motion of a point rocket is analysed, under the assumption that the retardation is proportional to the second power of the velocity and is an exponential function of the altitude. The weight of the rocket is assumed to be very small compared with both the thrust and the retardation. The thrust is a given function of time, but can be oriented at any instant, according to an arbitrary programme. It is asked to prescribe the direction of the thrust as a function of time, so that the horizontal range of the rocket is a maximum. It is found that under these conditions, the optimum trajectories corresponding to different thrust functions have all identical shape and can be obtained from one another by a simple translation.*

1. È stato considerato recentemente il seguente problema.

Un missile puntiforme si trovi all'istante $t = 0$ nel punto P_0 e sia animato dalla velocità v_0. Nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq t_1$ il missile abbia una massa variabile $m(t)$ e sia soggetto a una forza di propulsione $\boldsymbol{F}(t)$ parallela al piano verticale per v_0 (traiettoria piana). Per $t > t_1$ la massa abbia il valore costante m_1 e la forza di propulsione sia nulla. Le funzioni a valori positivi $m(t)$ e $F(t)$ sono assegnate. Si richiede di determinare istante per istante la direzione di $\boldsymbol{F}(t)$ in modo che il missile abbia gittata massima.

Ammettendo che la terra sia piana e che l'accelerazione di gravità sia costante, è stato dimostrato che $\boldsymbol{F}(t)$ deve avere direzione costante, sia nel caso che la resistenza del mezzo sia nulla [1],

[1] B. D. Fried e J. M. Richardson, *Optimum Rocket Trajectories*, « Journ. Appl. Phys. », **27**, 955 (1956).

sia nel caso che la resistenza sia lineare ([2]). Questi casi limite potranno approssimare la realtà fisica quando si realizzi una delle condizioni seguenti:

I. La velocità è sempre molto piccola. Perché ciò avvenga è necessario evidentemente che v_0 sia piccola e che la forza propulsiva non sia molto superiore al peso del missile.

II. Il tempo trascorso dal missile negli strati densi dell'atmosfera è piccolo rispetto a t_1.

Ci si può domandare se il teorema della costanza della direzione di $\boldsymbol{F}(t)$ abbia validità generale. Poiché il problema si presenta estremamente complicato quando tutti i parametri abbiano valore finito e non molto piccolo, è interessante esaminare l'altro caso limite, caratterizzato dalla condizione:

III. La velocità è molto grande, ma t_1 non è sufficiente per consentire l'uscita dall'atmosfera. In questo terzo caso la forza propulsiva dovrà essere molto superiore al peso.

Al limite dovrà, o la forza tendere all'infinito, o il peso tendere a zero. Ma se tende all'infinito la forza, le condizioni del problema divengono contraddittorie, perché, qualunque sia il valore assegnato a t_1, il missile potrà uscire dall'atmosfera. Non resta allora che far tendere a zero il peso. Per queste ragioni, ci occuperemo del caso del *missile leggero,* cioè del missile di massa praticamente trascurabile, immerso in un'atmosfera resistente, essendo $F(t)$ limitata.

Per sviluppare i calcoli in forma esplicita ammetteremo che la resistenza dell'aria sia proporzionale al quadrato della velocità e dipenda dall'altezza secondo la formula barometrica. Ma il procedimento, sia pure con qualche complicazione, potrebbe anche applicarsi a leggi di tipo diverso.

Troveremo che in questo caso limite il teorema della costanza della direzione della forza non è valido. Si ha invece il seguente risultato notevole: *le traiettorie di gittata massima corrispondenti a diverse* F(t) *sono tutte eguali e si ottengono l'una dall'altra per semplice traslazione.*

2. Prendiamo il piano della traiettoria per piano xy, con l'asse y verticale, diretto verso l'alto, e con P_0 come origine. Detta $\boldsymbol{v}(t)$

([2]) G. TORALDO DI FRANCIA, *Sulla gittata massima di un missile,* Rend. Acc. Naz. Linc., **21**, 404 (1956).

la velocità del missile, ammetteremo che la resistenza abbia la forma $-ae^{-by}vv$ con a e b costanti positive.

Quanto alla massa, per tradurre correttamente dal punto di vista matematico le ipotesi enunciate, dovremo porre $m(t) = \varepsilon M(t)$ con ε e $M(t)$ positive e far poi tendere ε a zero. L'equazione di moto completa dovrà allora scriversi

$$\varepsilon M(t)\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}(t) - \varepsilon M(t)\boldsymbol{g} - ae^{-by}v\boldsymbol{v} \tag{1}$$

avendo indicato con $\boldsymbol{g}$ l'accelerazione di gravità. Quando ε tende a zero, la (1) tende ad assumere la forma ridotta.

$$\boldsymbol{F}(t) - ae^{-by}v\boldsymbol{v} = 0\,. \tag{2}$$

Questa equazione esige che $\boldsymbol{v}$ coincida ad ogni istante con la velocità asintotica corrispondente ai valori che $\boldsymbol{F}(t)$ e $y(t)$ hanno in quell'istante.

Naturalmente, non sarebbe dimostrato con questo che, nel caso generale, la soluzione dell'equazione completa (1) tenda a coincidere con una soluzione della (2) quando ε tende a zero. Si ha a che fare con un *problema singolare di perturbazione* ([3]), cioè con lo studio delle soluzioni di un sistema del tipo $\varepsilon\dot{X}_i = f_i(t, X_1 .., X_n, \varepsilon)$ quando ε tende a zero. È questo un arduo problema che l'analisi moderna sta studiando, ma che non sembra ancora risolto in via generale. Per questo, rinunciando qui a prove formali, ci limiteremo ad accennare che per ε positiva le soluzioni della (2) obbediscono rispetto all'equazione completa (1) a quel fondamentale criterio qualitativo di *stabilità* che WASOW (l. c.) espone con linguaggio geometrico. Precisamente si tratta del fatto di facile verifica ehe, se a un dato istante e a una data quota imponiamo una $\boldsymbol{v}$ arbitraria, che non soddisfi la (2), l'equazione completa (1), per ε abbastanza piccola, esige che nasca un'accelerazione nel senso che tende a ridurre il modulo del primo membro della (2). Per ε negativa avverrebbe il contrario e pertanto, le soluzioni della (2) sarebbero *instabili* rispetto alla (1). Ma il problema fisico esige proprio che ε sia positiva.

Ad ogni modo, postulando la (2), porremo delle ulteriori condizioni, che rendono più tranquilli sulla sua adozione quale adeguata approssimazione alla realtà. Prima di tutto, faremo osservare che,

([3]) W. WASOW, *On Singular Perturbation Problems etc.*, *Actes du colloque international des vibrations non linéaires*, Services de documentation et d'information technique de l'aéronautique, Paris, 1953, p. 207.

come è ovvio, le due condizioni iniziali che si possono imporre alla (1) sono sovrabbondanti per la (2), che è del primo ordine. Precisamente, si ha dalla (2) $a v_0 \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{F}(0)$; ne consegue che $\boldsymbol{v}_0$ deve avere la direzione di $\boldsymbol{F}(0)$ e deve essere $v_0 = \sqrt{F(0)}/a$. Ammetteremo pertanto che il missile venga proprio lanciato con questa velocità iniziale, impressa da una forza impulsiva. In secondo luogo, si vede dalla (2) che, se le componenti di $d\boldsymbol{F}/dt$ non sono ambedue limitate, almeno una delle componenti dell'accelerazione $d\boldsymbol{v}/dt$ risulta non limitata. In questo caso è dubbio che si possa trascurare la forza d'inerzia nell'equazione di moto completa, anche se ε tende a zero. Pertanto ammetteremo che le componenti di $\boldsymbol{F}(t)$ siano derivabili ed abbiano derivate limitate. Con ciò rimarrà escluso, in particolare, il caso di forze impulsive lungo la traiettoria. Se poi $\boldsymbol{F}(t)$ è analitica, la soluzione ottenuta mediante la (2) potrà considerarsi come l'approssimazione di ordine zero in un procedimento nel quale la soluzione della (1) viene espressa mediante un opportuno sviluppo in serie ([4]).

Infine ammetteremo che $F(t)$ non si annulli mai nell'intervallo $(0, t_1)$, altrimenti non sarebbe lecito trascurare il peso rispetto a F.

3. Portando $\boldsymbol{F}(t)$ nel secondo membro della (2), e quadrando i due membri, si ottiene l'espressione di $\boldsymbol{v}$, dopo di che, sostituendo nella (2) stessa, si ha

$$e^{-\frac{b}{2}y}\,\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{F}(t)}{\sqrt{aF(t)}}. \tag{3}$$

Scritta per la seconda componente $v_y = dy/dt$, la (3) dà luogo a una equazione differenziale a variabili separate, che, integrata, fornisce

$$e^{-\frac{b}{2}y} = 1 - \frac{1}{k}\int_0^t \frac{F_y(t)}{\sqrt{F(t)}}\,dt \tag{4}$$

avendo posto $k = 2\sqrt{a}/b$.

Se a un dato istante il secondo membro della (4) si annulla, la y tende all'infinito. Ciò traduce nella nostra schematizzazione il fatto che il missile esce dall'atmosfera. Poiché questa possibilità deve essere esclusa, porremo che t_1 sia soggetta alla limitazione

$$\int_0^{t_1} \sqrt{F(t)}\,dt < k\,. \tag{5}$$

([4]) W. WASOW, *Asymptotic Properties of Non-Linear Analytic Differential Equations*, Corso del C.I.M.E. sulle «Equazioni Differenziali non lineari» tenuto a Varenna nel settembre del 1954.

Ci si convince infatti facilmente che, se vale la (5), il secondo membro della (4) non può mai annullarsi nell'intervallo $(0, t_1)$, comunque vari nel tempo la direzione di $\boldsymbol{F}(t)$.

Sostituendo la (4) nella (3), scrivendo la prima componente della velocità e integrando si ottiene l'ascissa x_1 all'istante t_1

$$x_1 = \frac{2}{b} \int_0^{t_1} \frac{F_x(t)dt}{\sqrt{F(t)} \left[k - \int_0^t \frac{F_y(\xi)}{\sqrt{F(\xi)}} d\xi \right]} \tag{6}$$

ove il denominatore dell'integrando non è mai nullo, a causa della (5).

Per ottenere la gittata G bisognerebbe aggiungere a x_1 la distanza orizzontale percorsa nel volo senza forza propulsiva, conseguente a t_1. Ma, come mostreremo subito, tale distanza tende a zero quando tende a zero la massa. Pertanto, nella nostra approssimazione, dovremo porre $G = x_1$.

4. All'istante t_1 il missile ha raggiunto il punto $P_1(x_1, y_1)$ ed è animato dalla velocità $\boldsymbol{v}_1$. La quota y_1 e certamente finita, a causa della (5) , e finita sarà la velocità v_1 che dalla (3) risulta. Dopo l'istante t_1 l'equazione di moto diviene.

$$m_1 \dot{\boldsymbol{v}} = - m_1 \boldsymbol{g} - ae^{-by} v \boldsymbol{v} . \tag{7}$$

La traiettoria dopo P_1 o raggiunge un'altezza massima $\bar{y}$ in un tempo $\bar{t} - t_1$ finito, o è sempre discendente, nel qual caso porremo $\bar{y} = y_1$ e $\bar{t} = t_1$. Il tempo di discesa $t_2 - \bar{t}$ dall'altezza $\bar{y}$ all'altezza del suolo $y_2 = 0$ è maggiore di $\bar{t} - t_1$ ([5]). Si avrà quindi

$$t_2 - t_1 < 2(t_2 - \bar{t}) . \tag{8}$$

Il modulo della velocità nell'intervallo (t_1, t_2) è sempre limitato, come è ovvio per il teorema della conservazione dell'energia. Porremo $v < V$ con V costante positiva.

Per maggiorare il tempo di discesa $t_2 - \bar{t}$ dall'altezza $\bar{y}$ all'altezza $y_2 = 0$, osserviamo che dopo l'istante $\bar{t}$ è $\dot{y} < 0$, così che per la seconda componente della (7) si ha

$$m_1 \ddot{y} = - m_1 g - ae^{-by} v \dot{y} < - m_1 g - a V \dot{y} . \tag{9}$$

([5]) T. Levi-Civita e U Amaldi, *Nozioni di balistica esterna*, Bologna, 1935, p. 31.

Pertanto il tempo di discesa è minore che se valesse l'equazione $m_1\ddot{y} = - m_1 g - aV\dot{y}$, quindi, integrando quest'ultima con le condizioni $y(\bar{t}) = \bar{y}$, $\dot{y}(\bar{t}) = 0$, si ottiene facilmente

$$t_2 - \bar{t} < \frac{\bar{y}aV}{m_1 g} + \frac{m_1}{aV}. \tag{10}$$

Per la prima componente della (7) si ha poi, ponendo $A = ae^{-b\bar{y}}$ e ricordando che $\dot{x}$ è sempre positiva ([6]).

$$m_1\ddot{x} = - a^{-by}v\dot{x} \leq - A\dot{x}^2. \tag{11}$$

Quindi, integrando con le condizioni $x(t_1) = x_1$, $\dot{x}(t_1) = v_{1x}$, si ha per l'ascissa x_2 del punto di caduta

$$x_2 - x_1 < \frac{m_1}{A} \ln \left[1 + \frac{Av_{1x}}{m_1}(t_2 - t_1)\right]. \tag{12}$$

Infine, tenendo conto delle limitazioni (8) e (10), si vede che $x_2 - x_1$ tende a zero quando m_1 tende a zero, c. d. d.

5. Poniamo ora $F_x(t) = F(t)\cos\psi(t)$, $F_y(t) = F(t)\sin\psi(t)$. Sostituendo nella (6), si ottiene la gittata come funzionale di $\psi(t)$

$$G[\psi(t)] = \frac{2}{b}\int_0^{t_1} \frac{\sqrt{F(t)}\cos\psi(t)}{k - h(t)}\,dt \tag{13}$$

dove si è posto

$$h(t) = \int_0^t F(\xi)\sin\psi(\xi)d\xi. \tag{14}$$

Diamo ora a $\psi(t)$ una variazione $\delta\psi(t) = \varepsilon\eta(t)$ con ε positiva e $\eta(t)$ arbitraria. Sostituendo nella (14) e quindi nella (13), si ottiene facilmente

$$G[\psi(t) + \varepsilon\eta(t)] = G[\psi(t)] - \varepsilon\frac{2}{b}\int_0^{t_1} \frac{\sqrt{F(t)}\sin\psi(t)}{k - h(t)}\eta(t)dt + \tag{15}$$
$$+ \varepsilon\frac{2}{b}\int_0^{t_1} \frac{\sqrt{F(t)}\cos\psi(t)}{[k - h(t)]^2}\,dt \int_0^t \sqrt{F(\xi)}\cos\psi(\xi)\eta(\xi)d\xi + O(\varepsilon^2).$$

([6]) G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, vol. II, Bologna, 1949, p. 348.

L'integrale doppio del secondo membro può trasformarsi mediante un'integrazione per parti in

$$\int_0^{t_1} \sqrt{F(t)} \cos \psi(t) \eta(t)\, dt \int_t^{t_1} \frac{\sqrt{F(\xi)} \cos \psi(\xi)}{[k - h(\xi)]^2}\, d\xi \tag{16}$$

per cui la (15) può scriversi

$$G[\psi(t) + \varepsilon\eta(t)] - G[\psi(t)] = \tag{17}$$

$$= \varepsilon \frac{2}{b} \int_0^{t_1} \left\{ - \frac{\sin \psi(t)}{k - h(t)} + \cos \psi(t) \int_t^{t_1} \frac{\sqrt{F(\xi)} \cos \psi(\xi)}{[k - h(\xi)]^2}\, d\xi \right\} \sqrt{F(t)}\eta(t)dt + O(\varepsilon^2).$$

Ne ricaviamo che, affinché G sia massima, si dovrà avere identicamente

$$\frac{\sin \psi(t)}{k - h(t)} = \cos \psi(t) \int_t^{t_1} \frac{\sqrt{F(\xi)} \cos \psi(\xi)}{[k - h(\xi)]^2}\, d\xi\,. \tag{18}$$

Da questa equazione funzionale, unita con la (14), si dovrà ricavare $\psi(t)$.

Naturalmente, la (18) è soltanto necessaria per aversi un massimo. Ma che il massimo esista è evidente fisicamente. Pertanto, se la soluzione della (18) è unica, essa corrisponderà proprio al massimo.

È notevole che, come vedremo subito, un opportuno giuoco alterno di derivazioni e di integrazioni consente di risolvere rigorosamente la (18) per una generica $F(t)$.

6. Moltiplicando ambo i membri per un medesimo fattore, scriviamo la (18) nella forma

$$\frac{\sqrt{F(t)} \sin \psi(t)}{[k - h(t)]^3} = \frac{\sqrt{F(t)} \cos \psi(t)}{[k - h(t)]^2} \int_t^{t_1} \frac{\sqrt{F(\xi)} \cos \psi(\xi)}{[k - h(\xi)]^2}\, d\xi\,. \tag{19}$$

Tenendo conto della (14), la (19) si può anche scrivere

$$\frac{h'(t)}{[k - h(t)]^3} = - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_t^{t_1} \frac{\sqrt{F(\xi)} \cos \psi(\xi)}{[k - h(\xi)]^2}\, d\xi \right)^2 . \tag{20}$$

Integrando, si ottiene con ovvia considerazione

$$\sqrt{\frac{1}{[k-h(t_1)]^2}-\frac{1}{[k-h(t)]^2}}=\int_t^{t_1}\frac{\sqrt{F(\xi)}\cos\psi(\xi)}{[k-h(\xi)]^2}\,d\xi\,. \tag{21}$$

Derivando rispetto a t, esprimendo $\cos\psi$ in funzione di h' mediante la (14) ed eseguendo alcune semplificazioni, si arriva a scrivere

$$\frac{[k-h(t)]h'(t)}{\sqrt{[k-h(t)]^2-[k-h(t_1)]^2}}=\sqrt{F(t)}\,. \tag{22}$$

Integrando ancora, si ha

$$\sqrt{[k-h(t)]^2-[k-h(t_1)]^2}=\int_t^{t_1}\sqrt{F(t)}\,dt\,. \tag{23}$$

Ora si può risolvere rispetto ad h, ottenendo

$$h(t)=k-\sqrt{[k-h(t_1)]^2+\left(\int_t^{t_1}\sqrt{F(t)}\,dt\right)^2}\,. \tag{24}$$

Esigendo poi che sia $h(0)=0$, come vuole la (14), si trova dalla (24) il valore di $h(t_1)$ e, sostituendo nella (24) stessa, si ottiene

$$h(t)=k-\sqrt{k^2-\left(\int_0^{t_1}\sqrt{F(t)}\,dt\right)^2+\left(\int_t^{t_1}\sqrt{F(t)}\,dt\right)^2}\,. \tag{25}$$

Infine, derivando e ricordando la (14) si ha

$$\sin\psi(t)=\frac{\displaystyle\int_t^{t_1}\sqrt{F(t)}\,dt}{\sqrt{k^2-\left(\displaystyle\int_0^{t_1}\sqrt{F(t)}\,dt\right)^2+\left(\displaystyle\int_t^{t_1}\sqrt{F(t)}\,dt\right)^2}} \tag{26}$$

Inversamente, ripetendo a ritroso il cammino percorso, si vede che, partendo dalla (26) e dalla (14), si soddisfa la (18). Dunque la (26) fornisce la soluzione generale del problema e tale soluzione è unica.

Si noti che, a causa della (5), il denominatore del secondo membro della (26) è sempre reale e positivo e maggiore del numeratore. Pertanto ψ è sempre reale.

7. Risulta dalla (26) che in ogni caso è $\psi(t_1)=0$, per cui la forza in P_1 deve essere orizzontale e P_1 è il punto più alto della traiettoria. Si verifica poi che, a causa della (5), la (26) non può mai fornire una ψ costante. Dunque la proprietà trovata nel caso lineare non è mai valida in quest'altro caso limite.

Servendosi della (26) per esprimere le componenti della forza nella (4) e nella (6) e svolgendo un lungo calcolo elementare, che omettiamo, si arriva ad eliminare t e ad ottenere gli elementi della traiettoria ottima in forma esplicita. Precisamente, la gittata risulta data dalla espressione

$$G=x_1=\frac{2}{b}\operatorname{arc\,sin}\left(\frac{1}{k}\int_0^{t_1}\sqrt{F(t)}\,dt\right) \tag{27}$$

che è sempre reale, in virtù della (5). L'altezza massima y_1 è data da

$$y_1=-\frac{2}{b}\ln\cos\left(\frac{b}{2}x_1\right). \tag{28}$$

Si trova poi che l'equazione della traiettoria si può porre semplicemente nella forma

$$e^{-\frac{b}{2}(y_1-y)}=\cos\left[\frac{b}{2}(x_1-x)\right]. \tag{29}$$

Da qui la notevole conclusione che in questo tipo di approssimazione le traiettorie ottime risultano tutte simili ed egualmente orientate e che nella similitudine si corrispondono i vertici P_1. Anzi, una volta fissate le proprietà del mezzo (e quindi b), le traiettorie corrispondenti a diverse determinazioni di $F(t)$ sono tutte eguali e si ottengono l'una dall'altra per semplice traslazione nel piano xy.

Naturalmente saranno diversi nei diversi casi gli archi di traiettoria al di sopra del suolo, ovvero gli archi di traiettoria effettivamente percorsi. E diverse saranno le velocità istantanee nei vari punti della traiettoria. Si trova precisamente che il modulo della velocità è dato da

$$v(t) = \frac{2}{b} \frac{F(t)}{\sqrt{k^2 - \left(\int_0^{t_1} \sqrt{F(t)}\,dt\right)^2 + \left(\int_t^{t_1} \sqrt{F(t)}\,dt\right)^2}} \tag{30}$$

e il suo modo di variare nel tempo dipende dalla funzione $F(t)$.

8. Quando si abbia in mente l'applicazione pratica, con massa non nulla, il caso limite studiato non potrà considerarsi che come una prima approssimazione. Tuttavia è istruttivo sincerarsi a posteriori con un esempio numerico, che l'errore commesso trascurando la forza d'inerzia rispetto alla forza propulsiva può essere effettivamente piccolo anche in casi non troppo lontani dalla realtà.

Per esempio, si ammetta che la forza F sia costante in $(0, t_1)$. Sostituendo nella (30), si trova agevolmente che, se è $3Ft_1^2 \leq k^2$, il modulo dell'accelerazione ha nell'intervallo $(0, t_1)$ il valore massimo pèr $t = 0$; precisamente si ha

$$\dot{v}_{max} = \frac{1}{4} a^{-\frac{3}{2}} b^2 F^{\frac{3}{2}} t_1 . \tag{31}$$

Per la valutazione della costante di resistenza a, dato che per il nostro scopo interessano solo gli ordini di grandezza, ricorderemo che, come si ricava anche da una teoria elementare valevole per velocità elevate (7), a meno di un fattore dell'ordine dell'unità, dipendente dalla forma dell'ogiva, la resistenza è data da $S\rho v^2$, dove S indica la sezione normale del missile e ρ la densità dell'aria. Indicando con ρ_0 la densità dell'aria per $y = 0$, ne consegue $a = S\rho_0$. Ponendo che la sezione del missile sia $S = 0.1$ m^2, e ricordando che al livello del mare si ha $\rho_0 = 1.3$ kg/m^3, otteniamo $a = 0.13$ kg/m. Ricordiamo poi che per l'atmosfera si ha $b = 1.2 \cdot 10^{-4}\ m^{-1}$. Poniamo che il missile sia sottoposto alla spinta $F = 2000$ kg (peso) per un tempo $t_1 = 10$ sec (col che vale la limitazione $3Ft_1^2 < k^2$) e che la sua massa iniziale m_0 sia di 100 kg. Allora, osservando che la massa è necessariamente una funzione decrescente del tempo, si trova per mezzo della (31) che il rapporto fra il valore massimo della forza d'inerzia e quello della forza propulsiva è dato da $m_0\dot{v}_{max}/F = 0.01$. Ciò dimostra che si può effettivamente avere un valore piccolo di questo rapporto già con dati numerici non troppo esorbitanti da quelli possibili.

(7) v. per es.: F. R. Moulton, *New Methods in Exterior Ballistics*, Chicago, 1926, p. 37 e sgg.