Bollettino
Unione Matematica Italiana

Bianca Manfredi

Sopra la più generale equazione reologica di stato per una classe di solidi naturali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.3, p. 422–435.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_3_422_0>

Sopra la più generale equazione reologica di stato per una classe di solidi naturali.

Nota di BIANCA MANFREDI (a Parma)

Sunto. - *Sfruttando considerazioni di carattere fisico-geometriche si stabilisce la più generale equazione reologica di stato per un mezzo elastico-viscoso nell'ipotesi generale di una configurazione di riferimento anche variabile con il tempo.*

Summary. - *With the aid of geometrical-physical considerations, the most general rheological equation of state for an elastic-viscous medium is established in the general hypothesis of a reference configuration varying with the time.*

1. - Introduzione.

Nella teoria classica delle trasformazioni dei mezzi continui si conviene di misurare la deformazione a partire da una configurazione del solido scelta fra tutte quelle possibili per il mezzo, anche se non effettivamente assunta. A tale configurazione non viene imposta alcuna restrizione fino a che non si debba qualificare il comportamento del mezzo dal punto di vista fisico, e non solo geometrico. In questo caso ad alcune ipotesi che riguardano di solito lo stato di tensione del solido nella configurazione di riferimento, viene associata l'ipotesi che la configurazione stessa di riferimento non varii col tempo. Ciò riesce naturalmente spontaneo quando si tratti di mezzi come quelli a trasformazioni reversibili, il cui stato fisico rimane individuato, particella per particella, da parametri scalari e dalla determinazione del tensore euleriano degli sforzi e di quello di deformazione inversa; ma può offrire qualche difficoltà quando si desideri esaminare, come qui intendo fare, il comportamento dei mezzi elastico-viscosi (1), a qualificare il cui stato fisico interviene anche il tensore velocità di deformazione.

(1) Generalizzando un'ovvia denominazione valida nel caso di deformazioni infinitesime, chiamo così i mezzi il cui stato fisico sia individuato, per ogni particella, oltre che da un certo numero di parametri, dalla determinazione *attuale* dei tensori deformazione, velocità di deformazione e sforzo.

ECKART [2] (2) suggerisce allora di far intervenire la misura della deformazione a partire da uno stato di riferimento generalmente variabile con il tempo, quale, ad esempio, si può pensare sarebbe teoricamente assunto dal mezzo quando bruscamente venissero soppresse tutte le forze esterne.

Si presenta poi la questione di specificare la dipendenza tra lo stato di tensione e quello di deformazione del solido. Tale relazione può essere precisata in modo rigoroso quando si tratta di sistemi a trasformazioni reversibili, appoggiandosi sui principi della termodinamica classica. Disgraziatamente tale strumento viene a mancare quando si prendono in esame, come nel nostro caso, mezzi elastico-viscosi. Per essi è necessario far ricorso ad ipotesi a priori giustificate solo intuitivamente.

In questa Nota mi limiterò a mezzi isotropi e ad un processo di sovrapposizione che, pur accostandosi sufficientemente alla realtà del fenomeno fisico, evita le più gravi difficoltà analitiche.

Assumendo, come suggerisce ECKART, che la configurazione di riferimento sia variabile con il tempo, scompongo lo stress nella sua parte isotropa (3) e nel tensore deviatore degli sforzi (extra-stress), e suppongo il deviatore degli sforzi somma di un tensore euleriano di tipo elastico e di un tensore euleriano viscoso, univocamente determinato il primo dal tensore di trasformazione, il secondo dal tensore velocità di deformazione (4). Preferendo poi considerazioni di carattere geometrico, fisicamente più intuibili, a quelle analitiche, estendo (n. 3), nell'ipotesi generale di una configurazione di riferimento variabile con il tempo, alcune proprietà già rilevate in [3].

Osservo inoltre che, nella configurazione attuale, a fibre appartenenti alle sezioni cicliche reali centrali dell'ellissoide di deformazione inversa (le sole fibre che nella trasformazione inversa subiscono un allungamento unitario uniforme, non si divaricano, nè si addensano) corrispondono, nella configurazione di riferimento, fibre appartenenti alle sezioni cicliche reali centrali dell'ellissoide di deformazione diretta, e viceversa: ciò permette di assumere anche qui, come in [3], l'ipotesi fondamentale quantitativa, fisica-

(2) I numeri in parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia al termine del lavoro.

(3) Da ritenersi, in generale, per i sistemi in esame, funzione degli invarianti del tensore deformazione e del tensore velocità di deformazione.

(4) Comunemente il metodo di sovrapposizione si riferisce direttamente al tensore degli sforzi, ma la scomposizione qui adottata mi pare opportuna anche da un punto di vista fisico.

mente intuibile, della coincidenza, in ogni istante, delle sezioni cicliche reali centrali relative all'ellissoide di deformazione diretta con quelle della quadrica indicatrice dell'extra-stress lagrangiano elastico. Così, con l'aiuto di altre ipotesi qualitative e quantitative, interessanti anche la velocità di deformazione, (n. 4), ricavo in forma generale, l'equazione reologica dei mezzi elastico-viscosi (n. 5).

Dall'espressione dell'equazione ottenuta si è indotti ad osservare che la velocità con cui varia la configurazione di riferimento, se interviene nel lavoro delle forze intime del mezzo [5], non influisce però (come era presumibile dalle ipotesi addotte per specificare la natura del mezzo) sull'equazione di stato del mezzo stesso.

2. - Considerazioni generali.

Sia S un mezzo continuo non soggetto ad alcun vincolo interno e C la sua configurazione all'istante t. Sia poi C_* [6] una configurazione di riferimento, che intenderò, in generale, variabile con t.

Rispetto ad una terna trirettangola fissa $(O;\ i_1,\ i_2,\ i_3)$ siano

$$x_j = x_j(t) \qquad \text{e} \qquad y_j = y_j(t) \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{1}$$

le coordinate rispettivamente del punto generico $P \in C$ e del punto $P_* \in C_*$ corrispondente di P.

Indicando poi con $s = \sum_{j=1}^{3} s_j i_j$ lo spostamento inverso $P \rightarrow P_*$ di componenti

$$s_j = y_j - x_j \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{2}$$

suppongo :

1) le s_j funzioni delle x_j limitate, continue e uniformi rispetto alle loro derivate parziali fino al terz'ordine almeno;

2) $$\frac{\partial(y_1,\ y_2,\ y_3)}{\partial(x_1,\ x_2,\ x_3)} > 0\,;$$

3) la corrispondenza tra P e P_* incondizionatamente biunivoca.

Inoltre indicando con $v = \sum_{j=1}^{3} v_j i_j$ la velocità euleriana del mezzo

(5) ECKART trova infatti ([7], pag. 256) che la variazione dell'energia specifica interna nell'unità di tempo comporta oltre a una potenza specifica meccanica, una potenza specifica dissipatrice, somma di una viscosa e di una di rilassamento, dipendendo quest'ultima dalla velocità con cui varia la configurazione di riferimento.

(6) In seguito il contrassegno * sarà posto a destra in basso, o, eventualmente, per maggiore semplicità di scrittura, a destra in alto.

e ponendo per brevità

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_h} = y_{j,h} \qquad \frac{\partial v_j}{\partial x_h} = v_{j,h}, \tag{3}$$

suppongo siano assegnati:

1) il tensore di trasformazione inversa (7) $a = \frac{dP_*}{dP}$ di componenti

$$a_{jh} = y_{j,h} \qquad (j;\ h = 1, 2, 3), \tag{4}$$

che definisce (insieme alla legge di variazione delle y col tempo) la completa corrispondenza fra gli elementi lineari orientati dP uscenti da $P \in C$ e gli elementi orientati dP_* uscenti da $P_* \in C_*$;

2) il tensore velocità di deformazione $d = D\frac{dv}{dP}$ di componenti

$$d_{jh} = (1/2) \cdot (v_{j,h} + v_{h,j}) \qquad (j;\ h = 1, 2, 3), \tag{5}$$

che misura la locale ed istantanea velocità con cui il mezzo S cambia forma ed il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè l'atto di moto sia di tipo rigido;

3) il tensore euleriano degli sforzi β definito per ogni punto $P \in C$.

Infine *suppongo che il comportamento meccanico del mezzo S resti definito, particella per particella ed in ogni istante, (oltre che da un certo numero di parametri) dai tre tensori a, d, β.*

Per il seguito occorre adattare, rispetto ad una configurazione di riferimento variabile con il tempo, alcune nozioni in sostanza già note.

Se, in un istante t, dP è un elemento lineare di versore u in C, il vettore dP_* di componenti, nello stesso istante t,

$$dy_j = \sum_{h=1}^{3} y_{j,h} dx_h \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{6}$$

dà l'immagine in C_* di dP, e (P_*, dP_*) si dirà *immagine su* C_*, nell'istante t, di (P, dP).

Il tensore a essendo $I_3 a > 0$, si decompone ([**6**], pag. 41) in un prodotto a sinistra di un tensore deformazione pura, a_δ, per un tensore rotazione locale, a_ρ:

$$a = a_\rho \cdot a_\delta. \tag{7}$$

(7) Indico qui, per semplicità tipografica, con a il tensore normalmente indicato con $\bar{\alpha}$ o α^{-1}.

Il tensore seguente, dilatazione pura,

$$c = Ka \cdot a = a_\delta^2 \tag{8}$$

definisce, mediante le sue componenti, in ogni istante, la metrica in C in funzione delle x, e, mediante l'uguaglianza

$$c = 1 + 2\bar{\varepsilon}, \tag{9}$$

il tensore doppio simmetrico $2\bar{\varepsilon}$, che è il tensore istantaneo di deformazione relativo alla trasformazione inversa $C \rightarrow C_*$ ([8]).

Il rapporto

$$\delta_u = \frac{|\,\mathrm{dP}_*| - |\,\mathrm{dP}\,|}{|\,\mathrm{dP}\,|} \tag{10}$$

si dirà *coefficiente istantaneo di dilatazione lineare in* $\mathrm{P} \in C$ *nella direzione* $\boldsymbol{u}$. Per (7) risulta evidente che è

$$\boldsymbol{u} \times c\boldsymbol{u} = (1 + \delta_u)^2. \tag{11}$$

Inoltre in corrispondenza ad ogni versore $\boldsymbol{u}$ uscente da $\mathrm{P} \in C$, per il tensore velocità di deformazione d, si ha evidentemente

$$d\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u} \times d\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \wedge d\boldsymbol{u} \wedge)\boldsymbol{u}\,; \tag{12}$$

$\boldsymbol{u} \times d\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}$ si dirà *la velocità di dilatazione corrispondente alla direzione* $\boldsymbol{u}$ *uscente da* $\mathrm{P} \in C$, $(\boldsymbol{u} \wedge d\boldsymbol{u}) \wedge \boldsymbol{u}$ si dirà *la velocità di deviazione corrispondente alla direzione* $\boldsymbol{u}$ *uscente da* $\mathrm{P} \in C$.

3. - Analisi dei tensori a, d e β.

3.1. - Il tensore a. — In questa analisi adatto all'ipotesi generale di una configurazione di riferimento variabile con il tempo, il metodo meccanico-geometrico esposto in [3].

Sia $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ una qualunque terna ortogonale sinistrorsa di versori uscenti dal punto $\mathrm{P} \in C$, e sia $\mathrm{d}\varphi$ un angolo positivo infinitesimo; i due vettori $\boldsymbol{u}$, e $\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\varphi \cdot \boldsymbol{v}$ inclinati, all'istante t, uno rispetto all'altro, dell'angolo $\mathrm{d}\varphi$, hanno per immagini in C_* rispettivamente i vettori $a\boldsymbol{u}$ e $a(\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\varphi \cdot \boldsymbol{v})$, uscenti da P_* ed inclinati di un angolo positivo $\mathrm{d}\varphi_*$ dato da

$$\cos \mathrm{d}\varphi_* = \text{vers. } a\boldsymbol{u} \times \text{vers. } a(\boldsymbol{u} + \mathrm{d}\varphi \cdot \boldsymbol{v})$$

([8]) L'annullarsi identico di $2\bar{\varepsilon}$ caratterizza, fra le possibili configurazioni di riferimento C_*, quelle che differiscono da C per uno spostamento rigido.

ed anche

$$\cos \mathrm{d}\varphi_* = \frac{u \times cu + cu \times \mathrm{d}\varphi \cdot v}{[u \times cu \cdot (u + \mathrm{d}\varphi \cdot v) \times c(u + \mathrm{d}\varphi \cdot v)]^{1/2}}. \tag{13}$$

Sviluppo il primo membro in serie di $\mathrm{d}\varphi_*$ ed il secondo membro in serie di $\mathrm{d}\varphi$ ottenendo, a meno di infinitesimi di ordine superiore,

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_*}{\mathrm{d}\varphi} = \mathrm{I}_3 a \cdot \frac{\sqrt{w \times c^{-1} w}}{u \times cu}. \tag{14}$$

Si dirà *scorrimento mutuo specifico di u secondo v relativo alla trasformazione $C \rightarrow C_*$ e all'istante t, il rapporto* $\dfrac{\mathrm{d}\varphi - \mathrm{d}\varphi_*}{\mathrm{d}\varphi}$. Per (14) è

$$\frac{\mathrm{d}\varphi - \mathrm{d}\varphi_*}{\mathrm{d}\varphi} = 1 - g_{uv} \tag{15}$$

con

$$g_{uv} = \mathrm{I}_3 a \cdot \frac{\sqrt{w \times c^{-1} w}}{u \times cu}. \tag{16}$$

Sia ora E_c l'ellissoide di deformazione caratteristico di c, e, suppostolo per il momento non di rotazione, siano u_i ($i = 1, 2, 3$) i suoi assi principali ordinati in modo che valgano per le componenti principali di deformazione a_i ($i = 1, 2, 3$) le disuguaglianze $a_1 > a_2 > a_3$.

Sia poi Σ_c una qualunque delle due sezioni cicliche reali centrali di E_c e sia π il suo piano, che, dato l'ordinamento di u_i ($i = 1, 2, 3$), conterrà u_2. Prendo ora come terna u, v, w una terna avente w normale a π e quindi u e v giacenti su π. Sarà allora:

$$u \times cu = 1/a_2, \tag{17}$$

coincidendo a_2 con il quadrato del raggio di Σ_c. Ne discende per (11) la seguente

1ª Proprietà. – *In ogni istante nella trasformazione $C \rightarrow C_*$ l'allungamento unitario corrispondente ad ogni versore u appartenente ad una delle sezioni cicliche reali centrali dell'ellissoide di deformazione inversa di centro $\mathrm{P} \in C$, è indipendente da u.*

Inoltre, per (16), da (17) discende la costanza di g_{uv} al variare di u e v su π; ora essendo i coseni direttori di w dati da

$$\alpha_1^2 = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3} \quad , \quad \alpha_2^2 = 0 \quad , \quad \alpha_3^2 = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3},$$

si ha

$$\mathrm{I}_3 a \cdot \sqrt{w \times c^{-1} w} = 1/a_2 , \tag{17'}$$

cioè, per (16) e (17), $g_{uv} \equiv 1$, ed anche

$$d\varphi_{*} = d\varphi. \tag{18}$$

Viceversa, indicando w il versore normale a un piano centrale $\bar{\pi}$ di E_c, suppongo costante, al variare dei versori u e v su $\bar{\pi}$, lo scorrimento mutuo specifico corrispondente. Da (16) segue allora la costanza di $u \times cu$ al variare di u su $\bar{\pi}$ e quindi la coincidenza di $\bar{\pi}$ con il piano di una delle sezioni cicliche reali centrali di E_c; inoltre da (17) e (17′) risulta $g_{uv} = 1$: il valore costante dello scorrimento mutuo specifico non può essere che il valore nullo. Vale così la seguente

2ª Proprietà. – *In ogni istante nella trasformazione $C \rightarrow C_{*}$ lo scorrimento mutuo specifico di due versori ortogonali è nullo se, e solo se, i due versori appartengono a una delle sezioni cicliche reali centrali dell'ellissoide di deformazione inversa di centro $\mathrm{P} \in C$.*

Il Manacorda prendendo in esame la trasformazione diretta $C_{*} \rightarrow C$ a partire da una configurazione di riferimento C_{*} fissa nel tempo, ha stabilito in [3] proprietà del tutto analoghe a quelle ora enunciate. Precisamente risulta che: *condizione necessaria e sufficiente* perchè l'allungamento unitario corrispondente ad un versore u_{*} uscente da $\mathrm{P}_{*} \in C_{*}$ non dipenda da u_{*}, e che lo scorrimento mutuo specifico di due qualunque versori ortogonali (u_{*}, v_{*}) uscenti da $\mathrm{P}_{*} \in C_{*}$ sia nullo, è che i versori u_{*} e (u_{*}, v_{*}) appartengano a una delle sezioni cicliche reali centrali dell'ellissoide di deformazione diretta E_{ξ} (9). D'altra parte tale proprietà sussiste anche nell'ipotesi più generale di una configurazione di riferimento variabile con il tempo (10); avendo ammessa l'incondizionata corrispondenza biunivoca fra gli elementi lineari uscenti da P e da P_{*}, è chiaro che alle fibre appartenenti alle sezioni cicliche reali centrali di E_{ξ} corrispondano in C *tutte e sole* le fibre appartenenti alle sezioni cicliche reali centrali di E_c, e viceversa. Vale pertanto la seguente

3ª Proprietà. – *In ogni istante esiste una corrispondenza biunivoca fra le sezioni cicliche reali centrali dell'ellissoide di defor-*

(9) ξ è il tensore di deformazione diretta $C_{*} \rightarrow C$ dato da (cfr. nota (7))

$$\xi = K\alpha \cdot \alpha = 1 + 2\varepsilon.$$

(10) Come si può provare procedendo analogamente a quanto abbiamo fatto in questa Nota.

mazione diretta e le sezioni cicliche reali centrali dell'ellissoide di deformazione inversa.

Per il seguito è utile infine anche la seguente proprietà geometrica:

4ª PROPRIETÀ. - *In ogni istante nella trasformazione $C \rightarrow C_*$ ogni versore u uscente da $P \in C$ ed appartenente a un piano π è complanare con il suo trasformato mediante c e con il versore normale a π, se, e solo se, il piano π è uno dei piani ciclici dell'ellissoide di deformazione inversa* (11).

Naturalmente tutte queste proprietà sussistono anche se l'ellissoide di deformazione inversa è rotondo.

3.2. - Il tensore *d*. — Procedendo analogamente al n. **3.1.**, sia E_d una delle quadriche indicatrici del tensore d avente per centro il punto $P \in C$; supposta, per il momento, non di rotazione, abbia gli assi principali ordinati in modo che valgano per le componenti principali del tensore d d_i $(i = 1, 2, 3)$ le disuguaglianze $d_1 > d_2 > d_3$. Siano poi Σ_d una delle sezioni cicliche reali centrali di E_d, π_d il suo piano, u un versore uscente da P ed appartenente a π ed infine w il versore normale a π uscente da P.
È chiaro che anche in questo caso al variare di u su π si mantiene costante il prodotto $u \times du = d_{uu}$, e si mantengono complanari i vettori u, du e w; da tale complanarità discende il parallelismo del prodotto $(u \wedge du) \wedge u$ al versore w. Per la definizione data alla fine del n. 2, si può affermare allora la seguente

1ª PROPRIETÀ. - *In corrispondenza ad ogni versore u uscente dal generico punto $P \in C$ ed appartenente al piano di una delle sezioni cicliche reali centrali della quadrica (o delle quadriche) indicatrice della velocità di deformazione, la velocità di dilatazione si mantiene costante e la velocità di deviazione è normale al piano della sezione stessa.*

Considero ora la trasformazione $C \rightarrow C'$ che porta dalla configurazione C assunta dal mezzo all'istante t alla configurazione C' assunta dal mezzo all'istante $t' > t$. Essa sia caratterizzata dal tensore di trasformazione α' e quindi dal tensore di deformazione

(11) Infatti se w è il versore normale a π, il piano (w, cu), normale a π, è normale anche al piano, π', tangente all'ellissoide di deformazione, E_c, nel punto in cui la retta passante per u incontra E_c; pertanto tale piano è il piano, condotto per P, normale alla retta, t, comune ai piani π e π'. D'altra parte se, e solo se, π è un piano ciclico di E_c, la retta per u sarà normale a t e come tale apparterrà al piano (w, cu).

ε', dato da $1+2\varepsilon' = K\alpha' \cdot \alpha'$. Sia $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ una qualunque terna ortogonale sinistrorsa di versori uscenti, nell'istante t. dal punto $P \in C$, e sia $d\varphi$ un angolo positivo infinitesimo; i due vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{u} + d\varphi \cdot \boldsymbol{v}$ inclinati, all'istante t, uno rispetto all'altro, dell'angolo $d\varphi$, hanno per immagine su C' rispettivamente i due vettori $\alpha'\boldsymbol{u}$ e $\alpha'(\boldsymbol{u} + d\varphi \cdot \boldsymbol{v})$ uscenti dal punto $P' \in C'$ corrispondente di P nell'istante t'. Sia $d\varphi'$ l'angolo di mutua inclinazione di $\alpha'\boldsymbol{u}$ e $\alpha'(\boldsymbol{u} + d\varphi \cdot \boldsymbol{v})$. Analogamente a quanto è stato definito nel n. **3.1.**, si dirà *scorrimento mutuo specifico dei due versori ortogonali* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *relativo all'istante* t *ed alla trasformazione* $C \to C'$, il rapporto

$$\frac{d\varphi(t) - d\varphi'(t,\ t')}{d\varphi}. \tag{19}$$

Se poniamo $\xi' = 1 + 2\varepsilon'$, si trova. [4], la relazione seguente analoga a (16):

$$\frac{d\varphi - d\varphi'}{d\varphi} = 1 - \sigma_{uv} \tag{20}$$

con

$$\sigma_{uv} = \sigma_{uv}(t,\ t') = \mathrm{I}_3\alpha' \cdot \frac{\sqrt{\boldsymbol{w} \times (\xi')^{-1}\boldsymbol{w}}}{\boldsymbol{u} \times \xi'\boldsymbol{u}} = \tag{21}$$

$$= \frac{[1 + 2\varepsilon'_{uu} + 2\varepsilon'_{vv} + 4(\varepsilon'_{uu}\varepsilon'_{vv} - \varepsilon'^2_{uv})]^{1/2}}{1 + 2\varepsilon'_{uu}}.$$

La velocità di scorrimento mutuo specifico di due versori ortogonali relativa all'istante t *e alla configurazione attuale* C, [4], ha allora l'espressione

$$(\dot{\sigma}_{uv})_C = \left(\frac{d}{dt'} \frac{[1 + 2\varepsilon'_{uu} + 2\varepsilon'_{vv} + 4(\varepsilon'_{uu}\varepsilon'_{vv} - \varepsilon'^2_{uv})]^{1/2}}{1 + 2\varepsilon'_{uu}}\right)_{t'=t}, \tag{22}$$

cioè

$$(\dot{\sigma}_{uv})_C = -\dot{\varepsilon}'_{uu} + \dot{\varepsilon}'_{vv}, \tag{23}$$

ed anche, essendo in C, $\dot{\varepsilon}'_{uu} = d_{uu}$, $\dot{\varepsilon}'_{vv} = d_{vv}$,

$$(\dot{\sigma}_{uv})_C = -d_{uu} + d_{vv}. \tag{23'}$$

Suppongo ora che i due versori ortogonali $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ appartengano al piano di una delle sezioni cicliche reali centrali Σ_d di E_d. Dalla prima proprietà del tensore d, segue la costanza di $\boldsymbol{u} \times d\boldsymbol{u} = d_{uu}$ al variare di $\boldsymbol{u}$ su π e quindi per (23') l'annullarsi di $(\dot{\sigma}_{uv})_C$. Viceversa l'annullarsi di $(\dot{\sigma}_{uv})_C$ porta per (23') l'appartenenza a Σ_d dei versori u e v. Vale così la seguente

2ª PROPRIETÀ. – *La velocità di scorrimento mutuo specifico di due versori ortogonali, relativa all'istante t e alla configurazione attuale, è nulla se, e solo se, i due versori appartengono ad una delle sezioni cicliche reali centrali della quadrica (o delle quadriche) indicatrice della velocità di deformazione.*

3.3. - Il tensore β. — Le proprietà del tensore β, che ora richiamo, sono state stabilite in [3]. Si ha precisamente

1ª PROPRIETÀ. – *In ogni istante nella configurazione attuale C tutte e sole le fibre giacenti sulle sezioni cicliche reali centrali della quadrica (o delle quadriche) indicatrice degli sforzi in* $\mathrm{P} \in C$ *hanno sforzi normali uguali fra loro.*

2ª PROPRIETÀ. – *In ogni istante nella configurazione attuale C tutte e sole le fibre giacenti sulle sezioni cicliche reali centrali della quadrica (o delle quadriche) indicatrice degli sforzi in* $\mathrm{P} \in C$ *hanno gli sforzi di taglio normali alle sezioni stesse.*

Osservazione. – È evidente che tali proprietà sono valide per un qualunque tensore β' che differisca dal tensore β per uno scalare arbitrario.

4. - Ipotesi fondamentali.

4.1. - Ipotesi qualitative. — Come abbiamo osservato nell'introduzione, un procedimento che, pur accostandosi sufficientemente alla realtà del fenomeno fisico, evita le più gravi difficoltà analitiche, è quello di *sovrapposizione.* Precisamente se p è uno scalare funzione arbitraria degli invarianti dei tensori a e d l'uguaglianza

$$\beta = p(\mathrm{I}a\,;\ \mathrm{I}d) + \tau(a\,;\ d) \quad [12] \tag{24}$$

spezza lo stress nella sua parte isotropa e nel deviatore degli sforzi (*extra-stress*); penso allora il tensore τ somma di un tensore euleriano elastico, τ_1, e di un tensore euleriano viscoso, τ_2, intendendo con ciò che il primo sia univocamente determinato dal tensore a e il secondo dal tensore d. Chiamo *mezzo anelastico di* ECKART *un*

[12] Indico, per brevità, con $p(\mathrm{I}a;\ \mathrm{I}d)$ la dipendenza, all'istante t, della parte isotropa dello sforzo dagli invarianti dei tensori a e d (oltre che, evidentemente, da un certo numero di parametri).

mezzo in cui, in ogni istante, la deformazione è misurata a partire da una configurazione variabile con il tempo e lo sforzo è definito dall'uguaglianza seguente:

$$\beta = p(\mathrm{I}a;\ \mathrm{I}d) + \tau_1(a) + \tau_2(d). \tag{24'}$$

Pongo così la seguente

1ª IPOTESI. - *Il mezzo S sia un mezzo anelastico di* ECKART.

D'altra parte nel caso attuale viene a mancare la classica definizione di mezzo isotropo relativa a trasformazioni reversibili ed a una configurazione di riferimento fissa ([6], pag. 135).

Assumo allora come definizione di mezzo isotropo relativa ad una generica trasformazione e ad una configurazione di riferimento variabile con il tempo, una proprietà caratteristica dei mezzi isotropi soggetti a trasformazioni reversibili relative ad una configurazione fissa ([6], pag. 136). Precisamente *un mezzo anelastico di* ECKART *si dirà isotropo in C con riferimento a C_*, quando in ogni istante coincidono le terne principali dei tensori c e τ_1, e le terne principali dei tensori d e τ_2*. Pongo così la seguente

2ª IPOTESI. - *Il mezzo S sia isotropo in C con riferimento a C_*.*

4.2. - Osservazioni. — È utile per il seguito osservare che in C_* il tensore di deformazione, ξ, nella trasformazione diretta (cfr. nota (9)), può porsi, secondo le nostre notazioni, nella forma (13)

$$\xi = a_\rho \cdot c^{-1} \cdot a_\rho^{-1}, \tag{25}$$

ed anche ponendo $c_\rho = a_\rho \cdot c \cdot a_\rho^{-1}$

$$\xi = c_\rho^{-1}. \tag{25'}$$

In C_* indico con $\tau_1{}^*$ *l'extra-stress elastico lagrangiano* definito, analogamente al tensore elastico lagrangiano ([6], pag. 105) da

$$\tau_1{}^* = \mathrm{I}_3 a^{-1} \cdot a \cdot \tau_1 \cdot Ka. \tag{26}$$

È un tensore simmetrico che gode di proprietà assai importanti; in particolare applicato al versore n_* uscente da $P_* \in C_*$ e normale all'elemento superficiale $d\sigma_*$, corrispondente a $d\sigma$ uscente da $P \in C$, dà l'immagine su C_* dell'extra-stress elastico specifico relativo a $d\sigma$. Tenendo presente la legge di corrispondenza tra ele-

(13) Si ha infatti, essendo $\alpha = a^{-1}$,

$$\xi = K\alpha \cdot \alpha = (a \cdot Ka)^{-1} = (a_\rho \cdot a\delta^2 \cdot a_\rho^{-1})^{-1} = a_\rho \cdot c^{-1} \cdot a_\rho^{-1}.$$

menti superficiali orientati, è così

$$\tau_1^* \cdot n_* \cdot d\sigma_* = a \cdot \tau_1 \cdot n \cdot d\sigma. \tag{27}$$

Da (25′) e (26) la definizione di mezzo isotropo data nel n. **4.1.** può essere enunciata nel modo seguente: *Un mezzo anelastico di* Eckart *è isotropo in C con riferimento a C_* quando in ogni istante coincidono le terne principali dei tensori c_ρ^{-1} e τ_1^* e le terne principali dei tensori d e β_2* [14].

4.3. - Ipotesi quantitative. — Per la prima e la seconda proprietà del n. **3.1.** le fibre appartenenti alle sezioni cicliche reali centrali dell'ellissoide di deformazione E_c subiscono un allungamento unitario uniforme, non si addensano, nè divaricano rispetto alle fibre corrispondenti della configurazione di riferimento C_*. Inoltre la terza proprietà del n. **3.1.** fa corrispondere alle sezioni cicliche reali centrali di E_c nella trasformazione inversa $C \to C_*$, le sezioni cicliche reali centrali di E_c nella trasformazione diretta $C_* \to C$. D'altra parte per l'Osservazione del n. **3.3.** all'extra-stress elastico τ_1 si possono applicare le proprietà ivi ricordate: così nella configurazione attuale C per versori appartenenti alle sezioni cicliche reali centrali della quadrica indicatrice E_{τ_1} i corrispondenti extra-stress normali sono fra loro uguali e gli extra-stress di taglio risultano ortogonali alle sezioni cicliche stesse. Infine nel n. **4.2.** l'isotropia del mezzo viene assicurata dalla coincidenza delle terne principali dei tensori τ_1^* e $\xi = c_\rho^{-1}$ e dei tensori τ_2 e d.

Tali considerazioni conducono a pensare che esista in C_* uno stretto legame fra le sezioni cicliche reali centrali di E_ξ e di $E_{\tau_1^*}$. Pare pertanto giustificato ammettere come *legame quantitativo extra-stress elastico e deformazione* la seguente

[14] Infatti se in C_* si ha $c_\rho^{-1} dP_* \parallel dP_*$ e $\tau_1^* dP_* \parallel dP_*$, dalla prima ipotesi, essendo $dP_* = a dP$, si ottiene successivamente:

$$a_\rho \cdot c^{-1} \cdot a_\rho^{-1} \cdot a_\rho \cdot a_\delta dP \parallel a_\rho \cdot a_\delta dP, \qquad c^{-1} \cdot a_\delta dP \parallel a_\delta dP,$$

e quindi

$$dP \parallel c dP.$$

Dalla seconda ipotesi per (26) si ha: $a \cdot \tau_1 \cdot K a dP_* \parallel dP_*$, ed anche $\tau_1 \cdot c \cdot dP \parallel dP$, cioè in base a quanto abbiamo ora provato

$$\tau_1 dP \parallel dP.$$

Analogamente si prova il viceversa.

3ª Ipotesi. – *Nel mezzo S, per ogni particella e in ogni istante, coincidono in C_* i piani delle sezioni cicliche reali centrali delle quadriche indicatrici di τ_1^* e di c_ρ^{-1}.*

Così analogamente, le proprietà trovate nel n. **3.2.**, interessanti fibre appartenenti alle sezioni cicliche reali centrali della quadrica indicatrice, E_d, della velocità di deformazione, saranno in stretta relazione con le proprietà ricordate nel n. **3.3.** valevoli anche per l'extra-stress viscoso. È naturale allora ammettere come *legame quantitativo extra-stress viscoso e velocità di deformazione* la seguente

4º Ipotesi. – *Nel mezzo S, per ogni particella ed in ogni istante, coincidono in C i piani delle sezioni cicliche reali centrali delle quadriche indicatrici di τ_2 e d.*

5. - L'equazione reologica di stato del mezzo S.

La terza ipotesi implica ([1], pag. 494) una relazione lineare fra le componenti principali dei tensori τ_1^* e c_ρ^{-1}, relazione che sinteticamente possiamo porre nella forma

$$\tau_1^* = A \cdot c_\rho^{-1} + B, \tag{28}$$

dove A e B, per l'isotropia del mezzo S, dipendono dalla trasformazione solo per il tramite degli invarianti del tensore c. Da (26) e (28) si ottiene allora ([15])

$$\tau_1 = l \cdot c^{-2} + m \cdot c^{-1} \tag{29}$$

con

$$l = \mathrm{I}_3 a \cdot A \quad \text{e} \quad m = \mathrm{I}_3 a \cdot B. \tag{29'}$$

Analogamente la quarta ipotesi implica la seguente relazione lineare fra l'extra-stress viscoso e la velocità di deformazione

$$\tau_2 = n \cdot d + q, \tag{30}$$

([15]) Infatti, essendo $\tau_1 = \mathrm{I}_3 a \cdot a^{-1} \cdot \tau_1^* \cdot Ka^{-1}$, si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_3 a \cdot A \cdot a^{-1} \cdot c_\rho^{-1} \cdot Ka^{-1} &= \mathrm{I}_3 a \cdot A \cdot a_\delta^{-1} \cdot a_\rho^{-1} \cdot a_\rho \cdot c^{-1} \cdot a_\rho^{-1} \cdot Ka_\rho^{-1} \cdot Ka_\delta^{-1} = \\ &= \mathrm{I}_3 a \cdot A \cdot c^{-2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_3 a \cdot B \cdot a^{-1} \cdot Ka^{-1} &= \mathrm{I}_3 a \cdot B \cdot (Ka \cdot a)^{-1} = \\ &= \mathrm{I}_3 a \cdot B \cdot c^{-1}.\end{aligned}$$

dove n e q, per l'isotropia del mezzo S, dipendono dagli invarianti principali del tensore velocità di deformazione.

Allora la prima ipotesi mediante la (24') porta, per (29) e (30) all'equazione reologica di stato del mezzo S nella seguente forma:

$$\beta = l \cdot c^{-2} + m \cdot c^{-1} + n \cdot d + p + q. \tag{31}$$

La (31) definisce *completamente e in forma generale* il legame fra la deformazione e lo stato di tensione interna del mezzo, se si specifica la dipendenza degli scalari l, m, n, p e q dagli invarianti dei tensori di deformazione e velocità di deformazione; tale determinazione caratterizza fisicamente il mezzo stesso e, pertanto, risulta nota quando si sia specializzato il particolare mezzo anelastico di ECKART che si vuole esaminare.

Osservazione. – Se in (31) si sostituisce a c la sua espressione in funzione del tensore deformazione diretta (cfr. note (7) e (9)), e se si pone $\varepsilon_\rho = \alpha_\rho \cdot \varepsilon \cdot \alpha_\rho^{-1}$, si ottiene

$$\beta = L \cdot \varepsilon_\rho^2 + 2M \cdot \varepsilon_\rho + n \cdot d + N \tag{31'}$$

con

$$L = 4l, \qquad M = 2l + m, \qquad N = l + m + p + q,$$

analogamente a quanto è stato provato in [4].

BIBLIOGRAFIA

[1] L. BIANCHI, *Lezioni di geometria analitica*, Spoerri, Pisa 1915.

[2] C. ECKART, *Physical Review*, **73** (1948), 373-382.

[3] T. MANACORDA, *Sul legame sforzi-deformazione nelle trasformazioni finite di un mezzo continuo isotropo*, « Riv. Mat. Univ. » Parma, 4 (1953), 31-49.

[4] T. MANACORDA, *Sul comportamento di una classe di corpi naturali*, « Rip. Mat. Univ. » Parma, 8 (1956) (in corso di stampa).

[5] M. REINER, *Rhéologie théorique*, Dunot, Paris 1955.

[6] A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, « Ann. Mat. Pura Appl. » (4) **22** (1943), 33-143.

[7] G. TRUESDELL, *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, « J. Rational Mechanics An. » **1** (1952), 126-300.