Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giovanni Crupi

Sulle onde piane magneto-idrodinamiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.3, p. 439–442.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_3_439_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Sulle onde piane magneto-idrodinamiche

Nota di GIOVANNI CRUPI (a Messina)

Sunto. - *Scopo della Nota è di dimostrare che sono possibili onde piane armoniche non smorzate in un fluido conduttore mobile in un campo magnetico, quando si accoppiano le equazioni relativistiche del campo elettromagnetico nei corpi in moto con le equazioni dell'idrodinamica. Una simile possibilità non sussiste quando si accoppiano queste con le equazioni di* MAXWELL *dei corpi in quiete.*

Summary. - *It is the aim of this Note to show that harmonic plane waves not damped in a mobile conductor fluid in a magnetic field are possible, when the relativistic equations of the electromagnetic field with regard to the movable bodies are associated with the equations of the hydrodynamics. The same possibility does not subsist when we associate these with the* MAXWELL'S *equations in regard to the motionless bodies.*

In ricerche recenti sono stati studiati fenomeni elettromagnetici aventi sede in mezzi fluidi conduttori in movimento, con particolare riguardo al caso di campi magnetici applicati. Seguendo ALFVÉN, [1] l'interessante accoppiamento che ne deriva, è stato studiato associando alle equazioni di EULER dell'idrodinamica le equazioni di MAXWELL dei mezzi in quiete.

Il Prof. G. LAMPARIELLO ha osservato che l'uso delle equazioni di MAXWELL-MINKOWSKI dei mezzi in moto può condurre a risultati più aderenti alla realtà fisica, e codesta osservazione è stata già utilizzata da CARINI [2].

Occorre tener presente che a rigore le equazioni di MAXWELL-MINKOWSKI valgono quando il mezzo mobile è animato da moto traslatorio non accelerato rispetto al sistema inerziale di riferimento in cui il fluido è in moto. Ma è possibile usare le equazioni stesse se la velocità euleriana è piccola di fronte alla velocità della luce, pure essendo variabile comunque al variare del posto e del tempo.

In questa Nota, considero un fluido conduttore incomprimibile, mobile in un campo magnetico omogeneo $\boldsymbol{H}_0$, e mi propongo di

(1) A. ALFVÉN, *Cosmical Electrodynamics*, cap. IV, Oxford University Press 1950.

(2) G. CARINI, *Sulle equazioni della magneto-idrodinamica* «Rend. Lincei», ser. VIII, vol. XXI, 1956. *Sulle soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto-idrodinamica* «Rend. Lincei», ser. VIII, Vol. XXII, 1957.

ricercare (sulla base del sistema di EULER-MINKOWSKI) le eventuali onde piane propagantisi nella direzione di $\boldsymbol{H}_0$.

Dimostrerò che possono esistere onde piane armoniche (non smorzate), mentre l'esistenza di simili onde è esclusa nel caso del sistema differenziale di EULER-MAXWELL.

1. - Il seguente sistema di EULER–MINKOWSKI

$$
(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
\dot{\boldsymbol{B}} = -c \operatorname{rot} \boldsymbol{E} & \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \\
\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{I} = c \operatorname{rot} \boldsymbol{H} & \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0 \\
\varepsilon \boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} - \dfrac{\lambda}{\mu} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} & \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \\
\mu \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} + \dfrac{\lambda}{\varepsilon} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{D} & \lambda = \dfrac{\varepsilon\mu - 1}{c} \\
\boldsymbol{I} = \sigma \left(\boldsymbol{E} + \dfrac{1}{c} \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B}\right) & \cdot \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} \\
\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} + \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{1}{c} \boldsymbol{I} \wedge \boldsymbol{B} - \operatorname{grad} p\right) &
\end{array}\right.
$$

si ottiene accoppiando le equazioni di EULER con quelle di MINKOWSKI dell' elettrodinamica dei corpi in moto, approssimate ai termini di primo ordine in β ($c =$ vel. della luce nel vuoto). Nelle precedenti equazioni abbiamo indicato con $\boldsymbol{E}$ l'intensità elettrica, con $\boldsymbol{H}$ l'intensità magnetica, con $\boldsymbol{F}$ la forza non elettromagnetica, con $\boldsymbol{v}$ la velocità della generica particella, con p la pressione nel generico punto, con ε la costante dielettrica, con μ la permeabilità magnetica, con σ la conducibilità elettrica e con ρ la densità del fluido.

In questo lavoro non sarà trascurata la corrente di spostamento $\dot{D}$ (tale omissione risponde fisicamente male nei casi di campi rapidamente variabili), ma sarà trascurata la forza $\boldsymbol{F}$.

Scegliendo il sistema inerziale di riferimento $S(0xyzt)$ con l'asse $0z$ coincidente in direzione e verso col campo magnetico impresso $\boldsymbol{H}_0$, è lecito pensare le grandezze del fenomeno come funzioni delle sole variabili z e t, anzi di $\zeta = kz - \omega t$ con k ed ω costanti non nulle.

Con tale scelta del sistema di riferimento le ultime tre equazioni del sistema (1) assumono la forma

$$\frac{dB_3}{d\zeta} = 0, \qquad \frac{dD_3}{d\zeta} = 0, \qquad \frac{du_3}{d\zeta} = 0$$

e da questo, per la natura del problema, si può dedurre

$$(2)\qquad B_3 = B_0, \qquad D_3 = 0, \qquad u_3 = 0.$$

Dal sistema (1), eliminando $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$, tenendo conto delle (2) ed osservando che $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}$ (essendo $u_3 = 0$) si ottengono le seguenti equazioni cartesiane

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mu c \frac{\partial D_2}{\partial z} - \mu\varepsilon \dot{B}_1 + c\lambda B_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0 \\ & \mu c \frac{\partial D_1}{\partial z} + \mu\varepsilon \dot{B}_2 - c\lambda B_0 \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0 \\ & \varepsilon\mu \dot{D}_1 + \mu\sigma D_1 + \frac{\sigma}{c} B_0 u_2 + c\varepsilon \frac{\partial B_2}{\partial z} = 0 \\ & \varepsilon\mu \dot{D}_2 + \mu\sigma D_2 - \frac{\sigma}{c} B_0 u_1 - c\varepsilon \frac{\partial B_1}{\partial z} = 0 \\ & \dot{u}_1 - \frac{B_0}{\rho\mu} \frac{\partial B_1}{\partial z} + \frac{B_0}{\rho c} \dot{D}_2 = 0 \\ & \dot{u}_2 - \frac{B_0}{\rho\mu} \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{B_0}{\rho c} \dot{D}_1 = 0 \\ & \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{c}\left(\dot{D}_1 B_2 - \dot{D}_2 B_1\right) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial z} (B_1^2 + B_2^2) = 0 . \end{aligned} \right.$$

2. - Dal sistema (3) si deduce che le componenti delle grandezze $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{D}$ soddisfano ad una medesima risolvente.

Eseguiamo i calcoli per la componente u_1.

Eliminando $\frac{\partial B_1}{\partial z}$ dalla quarta e dalla quinta delle (3), si ottiene

$$(4) \qquad D_2 = \frac{B_0}{c\mu} u_1 + \frac{c\varepsilon\rho}{\sigma B_0} \dot{u}_1 .$$

Sostituendo la (4) nella quarta delle (3) e poi moltiplicando l'equazione ottenuta per l'operatore $\frac{\partial}{\partial t}$ si ha

$$(5) \qquad \frac{\varepsilon\mu\rho}{\sigma B_0} \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} + \frac{\rho c\mu + \frac{B_0^2}{c}}{c B_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 B_1}{\partial t \partial z} .$$

Analogamente, moltiplicando la prima delle (3) per $\frac{\partial}{\partial z}$ e sostituendo nell'equazione ottenuta la (4) si ha

$$(6) \qquad B_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\rho c^2}{\sigma B_0} \frac{\partial^3 u_1}{\partial z^2 \partial t} = \frac{\partial^2 B_1}{\partial t \partial z} .$$

Infine, eliminando $\dfrac{\partial^2 B_1}{\partial t \partial z}$ dalle (5) e (6) si ottiene

$$\varepsilon\mu\rho \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} - c^2\rho \frac{\partial^3 u_1}{\partial z^2 \partial t} + \mu\sigma \left(\rho + \frac{\varepsilon B_0^2}{c^2} - \lambda \frac{B_0^2}{\mu c}\right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \sigma B_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0. \tag{7}$$

3. - Tentiamo di soddisfare alla (7) con una

$$u_1 = u_0 e^{kz + i\omega t} \tag{8}$$

dove ω è un parametro reale prefissato e k un parametro da determinarsi in modo opportuno.

Sostituendo la (8) nella (7) si trova che k deve soddisfare alla seguente equazione

$$\left(1 + i \frac{c^2 \rho\omega}{\sigma B_0^2}\right) k^2 + \frac{\rho\mu + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} B_0^2 - \lambda \frac{B_0^2}{c}}{B_0^2} \omega^2 + i \frac{\varepsilon\mu\rho\omega^3}{\sigma B_0^2} = 0. \tag{9}$$

L' eventuale esistenza di onde *non smorzate* (che è lo scopo di questa Nota) resta provata se, per un opportuno valore di B_0, l' equazione (9) ammette una radice immaginaria pura del tipo

$$k = i \frac{\omega}{W} \tag{10}$$

essendo W la velocità di propagazione dell' onda.

Sostituendo la (10) nella (9) ed eguagliando le parti reali e le parti immaginarie, otteniamo

$$\frac{1}{W^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \tag{11}$$

$$B_0^2 = c^2 \frac{\mu}{\varepsilon\mu - 1} \rho. \tag{12}$$

Dunque, possiamo concludere, in accordo con quanto abbiamo annunciato nella premessa, che se B_0 soddisfa alla (12) si hanno onde non smorzate, e la loro velocità di propagazione, definita dalla (11), coincide con quella delle onde elettromagnetiche propagantisi in un dielettrico in quiete rispetto al sistema inerziale di osservazione.

È facile vedere che non si perviene ad un simile risultato se l'indagine si conduce sulla base delle equazioni di EULER-MAXWELL, cioè se nel sistema (1) e nelle relazioni che da esso abbiamo dedotte si pone $\lambda = 0$.