Bollettino Unione Matematica Italiana

Erminia Lugaresi

Su alcuni teoremi di reciprocità dell'elettromagnetismo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.3, p. 443–445.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_3_443_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Su alcuni teoremi di reciprocità dell'elettromagnetismo.

Nota di ERMINIA LUGARESI (a Rimini)

Sunto. - *Si dimostra come alcuni teoremi di reciprocità nell'elettromagnetismo stabiliti dal* NICOLAU *si riducano, nel caso di campi alternativi, ai teoremi di reciprocità di* LORENTZ.

Summary. - *Author proofs how some reciprocity theorems of* NICOLAU *for the electromagnetic fields, are identical with* LORENTZ'*s theorems, in the case of harmonic fields.*

1. Siano $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_2$ due coppie di vettori complessi che rappresentano due campi elettromagnetici alternativi, di ugual frequenza, regolari in un dominio (D), occupato da un mezzo isotropo non conduttore e non soggetto a campi impressi. Come è noto, vale il classico teorema di reciprocità, dovuto a LORENTZ, espresso dalla relazione [1]:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{H}_2) = \operatorname{div}(\boldsymbol{E}_2 \wedge \boldsymbol{H}_1). \tag{1}$$

Il teorema può assumere le seguenti espressioni, l'ultima però valida solo se in (D) il mezzo è omogeneo:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{H}_2^* + \boldsymbol{E}_2^* \wedge \boldsymbol{H}_1) = 0 \ [2]. \tag{2}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}_1 \wedge \boldsymbol{E}_2^* + \mu \boldsymbol{H}_1 \wedge \boldsymbol{H}_2^*) = 0 \ [3]. \tag{3}$$

Recentemente EDMOND NICOLAU [4] ha ricavato altri teoremi di reciprocità per il campo elettromagnetico. Essi sono validi per campi variabili con legge qualunque, però, come farò vedere, essi si semplificano notevolmente nel caso, importantissimo nella pratica, di campi alternativi.

Infatti, in questo caso, come si vedrà, si può ridurli nell'uguaglianza fra divergenze dei vettori che rappresentano i due campi

[1] Cfr. RIEMANN - WEBER, *Differentialgleichungen der Physik*-Braunschweig, 1927 - Vol. II, pag. 575.

[2] La (2) si ottiene subito dalla (1), osservando che in luogo di $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_2$ si può porre $\boldsymbol{E}_2^*$, $-\boldsymbol{H}_2^*$. Infatti questi vettori rappresentano ancora un campo elettromagnetico, perchè come è facile verificare, soddisfano, come $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{H}_2$, alle equazioni di MAXWELL per vettori complessi e in mezzi senza conduttività.

[3] La (3) si ottiene dalla (1) osservando che, nei mezzi omogenei, è pure soluzione delle equazioni di MAXWELL: $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\boldsymbol{H}_2^*$, $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\boldsymbol{E}_2^*$. Queste osservazioni mi sono state gentilmente comunicate dal Prof. G. TORALDO DI FRANCIA.

[4] EDMOND NICOLAU, *Relatii de reciprocitate si de conservare in electricitate*, Buletin Stüntific. Acad. R. P. R. Tomul IV, Nr. (1952), pagg. 739-749.

elettromagnetici legati fra loro dal teorema di reciprocità; cioè si ottengono relazioni del tipo (1), (2), (3), facilmente riducibili a relazioni fra integrali superficiali, come negli ordinari teoremi di reciprocità. Dimostrerò però che i teoremi in discorso si ottengono anche uguagliando fra loro le parti reali dei due membri di (2) e (3); si stabilisce così una relazione fra i teoremi di NICOLAU e quello di LORENTZ. Proverò inoltre che le equazioni ottenute uguagliando a zero le parti immaginarie di (2) e (3), si possono ricavare mediante altri teoremi di reciprocità, analoghi a quelli di NICOLAU e che avrò occasione di stabilire nella presente nota.

2. I vettori $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$ che, come si è detto, rappresentano un campo elettromagnetico, di pulsazione ω, hanno la forma:

$$\boldsymbol{E}_1 = e^{j\omega t}(\boldsymbol{e}_1' + j\,\boldsymbol{e}_1'') \qquad \boldsymbol{H}_1 = e^{j\omega t}(\boldsymbol{h}_1' + j\,\boldsymbol{h}_1'') \tag{4}$$

dove $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_1''$, $\boldsymbol{h}_1'$, $\boldsymbol{h}_1''$ sono vettori indipendenti dal tempo t, j l'unità immaginaria.

I vettori alternativi $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{h}_1$, rappresentati da $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{H}_1$, sono le loro parti reali, cioè:

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1' \cos\omega t - \boldsymbol{e}_1'' \operatorname{sen}\omega t \qquad \boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{h}_1' \cos\omega t - \boldsymbol{h}_1'' \operatorname{sen}\omega t\,. \tag{5}$$

Analoghe formule, salvo lo scambio dell'indice 1 con l'indice 2, valgono per $\boldsymbol{E}_2$ ed $\boldsymbol{H}_2$ e per i vettori da essi rappresentati.

Sostituendo le (4) nella (2) e le loro coniugate ottenute cambiando j in $-j$ si ha, uguagliando allo zero, rispettivamente le parti reali e le parti immaginarie di (2):

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{e}_1' \wedge \boldsymbol{h}_2' + \boldsymbol{e}_1'' \wedge \boldsymbol{h}_2'' + \boldsymbol{e}_2' \wedge \boldsymbol{h}_1' + \boldsymbol{e}_2'' \wedge \boldsymbol{h}_1'') = 0 \tag{6}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{e}_1' \wedge \boldsymbol{h}_2'' - \boldsymbol{e}_1'' \wedge \boldsymbol{h}_2' + \boldsymbol{e}_2'' \wedge \boldsymbol{h}_1' - \boldsymbol{e}_2' \wedge \boldsymbol{h}_1'') = 0\,. \tag{7}$$

In modo analogo uguagliando allo zero le parti reali e le parti immaginarie di (3) si ha:

$$\operatorname{div}[\varepsilon(\boldsymbol{e}_1' \wedge \boldsymbol{e}_2' + \boldsymbol{e}_1'' \wedge \boldsymbol{e}_2'') + \mu(\boldsymbol{h}_1' \wedge \boldsymbol{h}_2' + \boldsymbol{h}_1'' \wedge \boldsymbol{h}_2'')] = 0 \tag{8}$$

$$\operatorname{div}[\varepsilon(\boldsymbol{e}_1' \wedge \boldsymbol{e}_2'' - \boldsymbol{e}_1'' \wedge \boldsymbol{e}_2') + \mu(\boldsymbol{h}_1' \wedge \boldsymbol{h}_2'' - \boldsymbol{h}_1'' \wedge \boldsymbol{h}_2')] = 0\,. \tag{9}$$

3. Il primo teorema di NICOLAU ha la forma seguente;

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{h}_1) + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 + \mu \boldsymbol{h}_1 \times \boldsymbol{h}_2) = 0\,. \tag{10}$$

Esso è valido qualunque sia la legge con cui varia il campo nel tempo, però se i campi sono alternativi, di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, potremo in (10) sostituire le (5). Allora, se integriamo da 0 a T, l'ultimo termine di (10) si annulla. Ricordando poi che l'integrale da 0 a T di sen ωt cos ωt è nullo, mentre sono uguali gli integrali, estesi allo stesso intervallo, di $\cos^2 \omega t$ e $\operatorname{sen}^2 \omega t$ si ha:

$$\operatorname{div}(e_1' \wedge h_2' + e_1'' \wedge h_2'' + e_2' \wedge h_1' + e_2'' \wedge h_1'') = 0 . \tag{11}$$

Cioè si ritrova la relazione (6).

4. Un altro teorema di NICOLAU, valido in un mezzo omogeneo, è il seguente:

$$\operatorname{div}(\varepsilon e_1 \wedge e_2 + \mu h_1 \wedge h_2) + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(e_2 \times h_1 - h_2 \times e_1) = 0 . \tag{12}$$

Supponendo i campi alternativi e procedendo come nel numero precedente si ritrova la (8).

5. Possiamo ricavare le (7) e (9) seguendo, in sostanza, il metodo del NICOLAU.

Consideriamo le equazioni di MAXWELL in forma ordinaria:

$$\operatorname{rot} h = \varepsilon \frac{\partial e}{\partial t} \qquad \operatorname{rot} e = -\mu \frac{\partial h}{\partial t} \tag{13}$$

in cui e ed h sono vettori reali. Alle (13) associamo le relazioni che si ottengono derivandole rispetto al tempo:

$$\operatorname{rot} \frac{\partial h}{\partial} = \varepsilon \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \qquad \operatorname{rot} \frac{\partial e}{\partial t} = -\mu \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} . \tag{14}$$

Tenendo presenti queste equazioni, ovviamente verificate da due campi elettromagnetici e_1, h_1, e_2, h_2, si ha;

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial e_1}{\partial t} \wedge h_2 - \frac{\partial e_2}{\partial t} \wedge h_1\right) = \operatorname{rot} \frac{\partial e_1}{\partial t} \times h_2 - \frac{\partial e_1}{\partial t} \times \operatorname{rot} h_2 -$$

$$- \operatorname{rot} \frac{\partial e_2}{\partial t} \times h_1 + \frac{\partial e_2}{\partial t} \times \operatorname{rot} h_1 = -\mu \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} \times h_2 - \varepsilon \frac{\partial e_1}{\partial t} \times \frac{\partial e_2}{\partial t} +$$

$$+ \varepsilon \frac{\partial e_1}{\partial t} \times \frac{\partial e_2}{\partial t} + h_1 \times \mu \frac{\partial^2 h_2}{\partial t^2}$$

cioè:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial e_1}{\partial t} \wedge h_2 - \frac{\partial e_2}{\partial t} \wedge h_1\right) = \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(h_1 \times \frac{\partial h_2}{\partial t} - h_2 \times \frac{\partial h_1}{\partial t}\right) \tag{15}$$

relazione analoga a (12). Supponendo poi i campi alternativi ed espressi dalle (5) e analoghe, la (7) risulta immediatamente dalla (15) dopo averla integrata da 0 a T.

Infine la (9) si ricava, con le solite considerazioni, dalla relazione:

$$\operatorname{div}\left(\varepsilon \frac{\partial e_1}{\partial t} \wedge e_2 + \mu \frac{\partial h_2}{\partial t} \wedge h_1\right) = \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(h_1 \times \frac{\partial e_2}{\partial t} - e_2 \times \frac{\partial h_1}{\partial t}\right). \tag{16}$$

che si verifica facilmente in base a (13) e (14).