Bollettino
Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

* B. Segre, Forme differenziali e loro integrali, vol II, Omologia, coomologia, corrispondenze ed integrali sulle varietà, Edizioni Universitarie Docet, Roma, 1950 (Enzo Martinelli)
* Convegno italo-francese di Algebra Astratta, Edizioni Cremonese, Roma, 1957 (Rodolfo Permutti)
* W. W. Stepanow, Lehrbuch der Differentialgleichungen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956 (Giovanni Sansone)
* A. I. Markuschewitsch, Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955 (Francesco G. Tricomi)
* Modern Computing Methods, Department of Scientific and Industrial Research, London, 1957 (Giovanni Sansone)
* Claus Muller, Grundprobleme der mathematische Theorie elektromagnetischer Schwingungen, Springer Verlag, 1957 (Dario Graffi)
* A. D. Myschkis, Lineare Differentialgleichungen mit nacheilendem Argument, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955 (Roberto Conti)
* J. W. S. Cassels, An introduction to diophantine approximation, Cambridge University Press, 1957 (Mario Cugiani)
* I. N. Vekua, Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Yupus und Randwertaufgaben, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956 (Roberto Conti)
* J. L. Synge, The Hypercircle in Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1957 (Giualiano Toraldo di Francia)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.3, p. 461–474.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_3_461_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

RECENSIONI

B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali,* vol. II, Omologia, coomologia, corrispondenze ed integrali sulle varietà. (Edizioni Universitarie Docet, Roma, 1956. Litografie, pagg. 422).

Con questo volume, che raccoglie parte degli argomenti che hanno formato oggetto dei corsi tenuti da B. Segre presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica negli anni dal 1952 al 1956, l'illustre Autore prosegue con immutata lena lo svolgimento dell'ampio programma iniziato nel primo volume (1).

Immutati altresì sono rimasti i caratteri fondamentali dell'opera, che non vuole essere una esposizione limitata dell'oggetto principale, ma intende abbracciare in un tutto organico le molteplici teorie che ad esso sono di fondamento o che ad esso si collegano intimamente.

Nell'attuale volume si passa allo studio globale delle forme differenziali e dei loro integrali, ciò che naturalmente richiede adeguate premesse topologiche, le quali a loro volta richiedono premesse algebriche, secondo si conviene ad una trattazione moderna della topologia. Il primo e il secondo capitolo sono perciò dedicati rispettivamente a « Preliminari algebrici » ed a « Preliminari topologici »; ma occorre subito dire che in realtà essi costituiscono due trattatelli in proposito.

Il terzo ed ultimo capitolo del volume è dedicato alle proprietà globali generali degli « Integrali sulle varietà differenziabili ».

Prima di passare ad un esame un po' dettagliato del contenuto dei singoli capitoli, rileviamo che il volume è dotato, oltre che di note storico-bibliografiche come il precedente, di un vasto indice analitico comprendente gli argomenti dei due volumi. Appare da ciò la notevole cura anche formale con cui è redatta l'opera, nonostante la modesta veste litografica; a nostro avviso anzi troppo modesta rispetto all'importanza dell'opera la quale è certamente destinata a contribuire in maniera determinante alla diffusione in Italia di fondamentali teorie finora non molto coltivate.

Degli svariati contributi originali dell'Autore che trovano posto nel volume, si dirà in seguito.

Il Cap. I, dopo alcune nozioni generali sugli insiemi e le relative operazioni fondamentali, prende a trattare la teoria dei gruppi nei suoi lineamenti generali (sottogruppi, classi laterali, omomorfismi, successioni esatte, ecc.) per passare poi alla classificazione dei gruppi abeliani con un numero finito di generatori. Si considerano quindi anelli, ideali, omomorfismi tra anelli, corpi e campi, per farne successiva applicazione alla teoria dei gruppi

(1) Il vol. I, apparso nel 1951 a cura della stessa casa editrice, è dedicato al « Calcolo algebrico esterno e proprietà differenziali locali ». Ved. la recensione in questo Bollettino, (1952), fasc. 2, pag. 190.

con operatori trattando in particolare diffusamente degli A-moduli (moduli su un anello A) e degli spazi vettoriali (moduli su un corpo). È approfondito lo studio delle trasformazioni lineari tra spazi vettoriali con base finita, distinti o sovrapposti, studio che viene illuminato dalla interpretazione geometrica che lo riconduce sostanzialmente a quello classico delle omografie e della loro classificazione.

Il Cap. II si apre con una rapida rassegna delle nozioni generali di spazi topologici, rappresentazioni continue, gruppi topologici, spazi fibrati, varietà differenziabili reali, varietà a struttura complessa, ecc. In particolare vien data una rapida dimostrazione del teorema di Whitney sull'immergibilità di una varietà differenziabile in uno spazio euclideo, se pure in ipotesi ridotte.

Si passa quindi ad uno studio abbastanza approfondito della omologia e della coomologia in un complesso astratto e in particolare simpliciale; sono poi illustrati rapidamente i concetti e le tappe fondamentali che conducono a stabilire l'invarianza topologica dei gruppi di omologia di un poliedro, secondo la strada classica che fa perno sul teorema di deformazione di Alexander.

Un ampio sviluppo è dato alla teoria dell'intersezione e dell'allacciamento in una varietà di Poincaré, nonchè allo studio dei prodotti topologici di varietà di Poincaré. Di tutto ciò si fa applicazione successivamente esponendo una trattazione approfondita, e in larga misura originale come impostazione e come risultati, della teoria delle corrispondenze tra varietà di Poincaré. Sono discussi in generale gli invarianti aritmetici, algebrici e geometrici di siffatte corrispondenze, è stabilita la formula delle coincidenze di Lefschetz, ecc. Particolare esame è dedicato al caso delle corrispondenze che l'Autore denomina semiregolari (comprendenti in particolare le corrispondenze algebriche e antialgebriche tra varietà algebriche). L'importanza di tale tipo di corrispondenze risiede nel fatto ch'esse soddisfano alla condizione che il prodotto di corrispondenze semiregolari è ancora una corrispondenza semiregolare. Tra i notevoli risultati stabiliti per queste corrispondenze va segnalata una relazione che generalizza al campo topologico la formula di Zeuthen.

Un successivo paragrafo è dedicato a svariate applicazioni dei risultati conseguiti; applicazioni che concernono le rappresentazioni tra varietà, i campi di vettori tangenti e i ricoprimenti delle sfere. A proposito di questi ultimi sono ottenuti interessanti risultati metrico-topologici, generalizzanti il teorema di Lusternik-Schnirelmann-Borsuk, i quali trovano qui posto per la prima volta.

Col Cap. III si entra nel vivo della teoria della integrazione delle forme differenziali entro una varietà differenziabile. Dopo aver posto con rigore e generalità le nozioni preliminari (sulla base del concetto di partizione di Dieudonné), si passa a stabilire i tre fondamentali teoremi di De Rham, compendiabili nell'affermazione che l'anello delle forme chiuse è isomorfo all'anello di coomologia della varietà. La trattazione segue da vicino quella originaria di De Rham; non mancano tuttavia cenni di altre strade che conducono al risultato medesimo.

Di ciò si fa applicazione nel capitolo stesso dimostrando il teorema di Hodge che afferma l'inesistenza di integrali di prima specie con periodi nulli sulle varietà algebriche e dando un rapido schizzo della teoria delle correnti di De Rham.

Il capitolo si chiude con lo studio delle immagini riemanniane metriche degli spazi proiettivi complessi (metriche di Mannoury, Study, Kähler), coi teoremi di Wirtinger relativi, e infine con lo studio delle trasformazioni cremoniane intere (cioè rappresentabili con funzioni razionali intere), per le quali viene stabilita, per la prima volta in condizioni generali, una notevole caratterizzazione metrica.

ENZO MARTINELLI

Convegno italo-francese di Algebra Astratta, Italia, 16-19 aprile 1956, promosso dall'Università degli Studi di Padova con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Edizioni Cremonese, Roma 1957, di pp. VI+73.

Dal 15 al 19 aprile 1956, presso il Seminario matematico della Università di Padova, ebbe luogo un Convegno di Algebra al quale parteciparono numerosi studiosi italiani e francesi. L'Unione matematica Italiana, con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, si assunse il meritevole e non facile compito di raccogliere in un volume il testo delle conferenze e delle comunicazioni tenute durante il Convegno, fornendo con ciò un ampio e dettagliato resoconto delle varie riunioni.

Il volume riproduce precisamente un ciclo di quattro conferenze del prof. P. Dubreil (Parigi) sopra la Teoria degli pseudogruppi ordinati, una conferenza del prof. L. Lombardo-Radice (Palermo) sulla Teoria dei piani grafici, ed una del prof. G. Zappa (Firenze) sopra le proprietà reticolari nei gruppi astratti. Purtroppo non è pervenuto in tempo il testo di due conferenze tenute dal prof. M. Krasner (Parigi) per cui i promotori del volume sono stati costretti a limitarsi alla sola citazione dei titoli: « Les Hypergroupes » e « Les Corpoides ».

Il volume chiude con i Sunti delle comunicazioni. Esse riguardano la Teoria degli spazi lineari finiti (Barlotti, Rosati, Tallini), quella dei piani grafici *h-l* transitivi (Curzio), problemi di immersione per pseudogruppi (Boccioni) e gli elementi modulari di un gruppo finito (Zacher).

Tutte le comunicazioni sarebbero da segnalare singolarmente, e per l'interesse che esse presentano in sè, e per l'importanza generale dei risultati ottenuti nel quadro dell'Algebra moderna. Per ragioni di spazio ci limitiamo però a riassumere soltanto il contenuto delle Conferenze, ritenendo che il Lettore potrà consultare più comodamente i sunti delle comunicazioni che non il testo completo delle Conferenze stesse.

Particolare elogio va infine attribuito alla Casa Editrice per il modo esemplare con cui è stata curata la veste tipografica del volume.

Le conferenze di P. Dubreil (« Introduction à la théorie des demi-groupes ordonnès ») costituiscono un nitido e dettagliato sguardo d'assieme sulla teoria degli pseudogruppi ordinati. Oltre a risultati ormai classici, vengono riassunti recenti contributi dell'A., di M.me Dubreil e dei loro allievi.

Facendo leva su di un ristretto numero di postulati, si riesce a costruire una teoria, interessante non solo da un punto di vista logico, ma che, come avverte lo stesso prof. Dubreil, pone in evidenza i legami tra l'Algebra da una parte e l'Aritmetica e la Geometria dall'altra. Frequenti sono gli esempi addotti per chiarire la teoria; qualcuno veramente suggestivo richiama vivamente l'interesse del lettore. Il campo di studi in cui ci introduce il prof. Dubreil costituisce un capitolo dell'Algebra moderna di notevole importanza ed è da augurarsi che la sopradetta teoria trovi la più larga diffusione anche tra gli studiosi italiani.

L'A. ha esposto principalmente la teoria dei cosiddetti « gerbiers » o « pseudogruppi semireticolati ». Un « gerbier » è una struttura algebrica G in cui è definita un'operazione di moltiplicazione associativa ed una relazione di ordinamento parziale ($a \subseteq b$), distribuitiva rispetto alla moltiplicazione e tale che $a \subseteq b$ implichi $xa \subseteq xb$ e $ax \subset bx$, relazione rispetto a cui G è un semireticolo superiore (per due elementi a, b qualunque di G esiste l'unione $a \cup b$, ancora in G). Sono trattati in modo particolare i « gerbiers résidués », cioè tali che, comunque si prendano in essi due elementi a e b, le disequazioni $bx \subseteq a$ e $xb \subseteq a$ ammettano una soluzione massima. Di questi concetti l'A. fa uso per ricercare i gruppi omomorfi su di uno pseudogruppo dato, mentre la considerazione degli omomorfismi di uno pseudogruppo D su di un gruppo G porta a rilevare notevoli sottoinsiemi di D. Formano oggetto dell'esposizione anche i « gerbiers commutativi interi », cioè contenenti un elemento unità e tale che $x \subseteq e$ per ogni x; e tra questi i « gerbiers di Dedekind », cioè i gerbiers commutativi interi per i quali $a \subseteq b \subset e$ implica l'esistenza di un elemento c per cui $a = bc$ ed inoltre ogni catena ascendente è finita. Per tali gerbiers vengono dati notevoli teoremi (dovuti ai coniugi Dubreil) relativi alla fattorizzazione degli elementi. Importante conseguenza dei risultati esposti nella conferenza è che la teoria sviluppata per un gerbier contiene come caso particolare la teoria degli ideali di un dominio d'integrità noetheriano, integralmente chiuso. Si dà poi un'applicazione geometrica dovuta a Dubreil e cioè che mediante la teoria di Artin-Prüfer è possibile dimostrare che ogni varietà aritmeticamente normale è di prima specie. Vengono infine esposti taluni interessanti risultati di I. Molinaro riguardanti l'estensione agli pseudogruppi ordinati residuati di molte proprietà prima stabilite per i gerbiers.

Nella conferenza di L. Lombardo-Radice (Questioni algebrico-geometriche relativi ai teoremi « $p = 0$ ») si dà una chiara ed esauriente esposizione dei problemi concernenti il teorema « $p = 0$ », indicando non solo quanto sia stato ottenuto da vari studiosi in questo campo ma sviluppando anche numerosi risultati dell'A. stesso. L'esposizione è preceduta da un richiamo delle nozioni di « coordinate di Hall » in un piano grafico e di « operazione ternaria » nell'insieme di tali coordinate.

L'A. si occupa del problema di determinare tutti i possibili piani grafici non isomorfi « a caratteristica p », verificanti cioè certe condizioni di allineamento. È noto che un piano lineare (finito od infinito) costruito sopra un corpo a caratteristica p è anch'esso a caratteristica p; ma non è noto se vale anche il viceversa. Si è indotti tuttavia a ritenere che ciò avvenga nel caso dei piani grafici finiti, formulando la congettura che i piani grafici finiti a caratteristica p siano tutti e soli i piani lineari finiti sopra un corpo a caratteristica p.

I piani a caratteristica 2 coincidono con i piani nei quali ogni quadrangolo completo ha i punti diagonali allineati. La congettura sopra enunciata assume in tal caso la seguente forma (di Pickert): Un piano grafico finito a caratteristica 2 è desarguesiano. Più in generale, lo stesso Pickert avanza la congettura che non esistono piani grafici non desarguesiani finiti nei quali tutti i quadrangoli completi abbiano i tre punti diagonali allineati, oppure tutti i tre punti diagonali non allineati. Diversi risultati di Rasevski, di Pickert, di Hanna Neumann e di Lombardo-Radice, tutti ampiamente illustrati nel corso della conferenza, servirono ad avvalorare le due congetture di Pickert ed in particolar modo la prima di esse. Questa, in data posteriore a quella del Convegno, fu dimostrata vera, per i piani grafici finiti, dal Gleason, come è indicato in una nota in calce alla conferenza, ma i risultati esposti in essa conservano il loro interesse, perchè, almeno in parte, concernano anche piani infiniti.

La conferenza termina con qualche cenno su taluni risultati dell'A. riguardanti i piani a caratteristica 3 e con un invito agli studiosi di estendere le ricerche al caso di caratteristica > 3.

La conferenza di G. Zappa (Questioni relative al reticolo dei sottogruppi di un gruppo: conoscenze attuali e problemi aperti) fornisce una panoramica e nello stesso tempo esauriente esposizione dei principali risultati conseguiti negli ultimi vent'anni nel campo delle proprietà reticolari dei gruppi (finiti od infiniti), con dettagliate indicazioni bibliografiche e numerose proposte per ulteriori ricerche. Essa si divide in quattro parti. La prima è dedicata alla caratterizzazione di classi di gruppi in base a particolari proprietà del reticolo dei sottogruppi. L'A. ricorda i risultati in nostro possesso circa la caratterizzazione dei gruppi per cui il reticolo dei sottogruppi è distributivo (Ore), modulare (Iwasawa), sopra-modulare (Sato), sottomodulare (Ito), complementato o relativamente complementato (Zacher) e dei gruppi per cui è distributivo il reticolo dei sottogruppi di composizione (Zappa). Nella seconda e terza parte l'A. dà un ampio resoconto delle ricerche compiute da vari autori sulla determinazione dei gruppi G per cui il reticolo dei sottogruppi $L(G)$ sia isomorfo, e rispettivamente, omomorfo, ad un reticolo assegnato. In primo piano sono i risultati del giapponese Suzuki, i quali costituiscono il più cospicuo contributo alla soluzione di questi problemi. Non vanno però taciuti gli apporti della scuola italiana (Zappa, Permutti, Zacher, Greco), nonchè quelli degli americani Jones e Whitman. Infine, la quarta parte tratta della determinazione di elementi notevoli nei reticoli di tutti i sottogruppi di un gruppo, o dei soli sottogruppi normali, o di composizione, con particolare riferimento agli elementi neutri di tali reticoli (Suzuki, Zappa, Greco, Zitarosa) e a quegli elementi, considerati la prima volta da G. Zacher e da questo detti «modulari», elementi che formano anche oggetto della comunicazione di quest'ultimo. La conferenza contiene anche l'indicazione di numerosi problemi aperti circa gli argomenti in questione.

RODOLFO PERMUTTI

W. W. STEPANOW, *Lehrbuch der Differentialgleichungen*, IX + 470 pp., (Berlin 1956; Deutscher Verlag der Wissenschaften).

Questo volume, il ventesimo di una collezione di testi sulle matematiche superiori edita da H. Grell, K. Maruhn, W. Rinow, contiene la traduzione in lingua tedesca della sesta edizione in lingua russa delle *Equazioni Differenziali* del compianto matematico W. W. Stepanow.

Il volume comprende dieci capitoli di cui i primi sette sono dedicati alle equazioni differenziali ordinarie, l'ottavo e il nono alle equazioni alle derivate parziali del primo ordine, mentre il decimo, di trentacinque pagine, redatto da A. P. Juschkevitsch, dà un inquadramento storico delle principali ricerche sulla teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

Numerosi esercizi accompagnano i primi nove capitoli e le soluzioni di quelli semplicemente proposti sono indicate alla fine del volume. Pure alla fine del volume sono gli indici bibliografici dei Trattati consultati, degli Autori, e quello della materia.

I primi tre capitoli riguardano le equazioni del primo ordine: il primo contiene un esame approfondito dei casi elementari; il secondo col metodo delle approssimazioni successive dà il teorema di esistenza e di unicità per l'equazione $y' = f(x, y)$ nel caso di $f(x, y)$ lipschitziana rispetto ad y, e il teorema di esistenza di Peano nel caso di $f(x, y)$ continua; il terzo, sulle equazioni $f(x, y, y') = 0$, mette in particolare rilievo gli integrali singolari.

I capitoli dal quarto al settimo riguardano le equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore al primo e i sistemi differenziali ordinari.

Nel quarto capitolo, premesso col metodo delle approssimazioni successive il teorema di esistenza, sono passati in rassegna alcuni tipi di equazioni di ordine superiore integrabili con quadrature; nel quinto capitolo sono raccolti i classici teoremi sulle equazioni lineari di ordine n omogenee e non omogenee; nel sesto una parte riguarda l'integrazione delle equazioni a coefficienti costanti e l'altra sulle equazioni lineari omogenee del secondo ordine, sotto opportune ipotesi sui coefficienti, fornisce alcuni teoremi di carattere oscillatorio ed altri sul comportamento asintotico delle soluzioni.

Il capitolo settimo, sui sistemi lineari di forma normale, contiene il teorema di esistenza, quelli sulla dipendenza degli integrali dai valori iniziali, l'integrazione dei sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti e alcuni teoremi di Ljapounow sulla stabilità degli integrali.

Il capitolo ottavo presenta una rapida trattazione delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine, lineari, omogenee e non omogenee, mentre alle equazioni non lineari, sempre del primo ordine, è dedicato il capitolo nono. In quest'ultimo premesse le nozioni di integrale completo, generale e singolare, l'integrazione con i metodi di Lagrange e di Charpit, e altresì alcune nozioni sul problema di Pfaff relativo alle forme differenziali, è data la risoluzione in piccolo del problema di Cauchy per le equazioni alle derivate parziali del primo ordine.

La lettura del volume, che richiede unicamente la conoscenza della materia che si svolge nei corsi istituzionali dei nostri primi bienni universitari, è assai agevole giacchè gli argomenti sono esposti in forma piana e lumeggiati con esempi ben scelti.

Concludendo quest'opera testimonia le belle qualità di trattatista dello Stepanow, già noto per i suoi contributi originali alla teoria delle funzioni di variabile reale e a quella sulle equazioni differenziali ordinarie, e noto altresì per aver redatto con V. V. Nemiskii un famoso volume sulla «*Teoria qualitativa delle equazioni differenziali ordinarie*» di cui la seconda edizione in lingua russa comparve nel 1949.

GIOVANNI SANSONE

A. I. MARKUSCHEWITSCH, *Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen (Schizzi sulla storia delle funzioni analitiche)* Berlin, Deutsche Verlag der Wissensch., 1955, VIII + 139 pp.

Questo volumetto — traduzione di un'opera in russo dell'A., uscita nel 1951 — ha come scopo principale di mettere in luce i notevoli contributi apportati negli ultimi decenni dai matematici russi alla teoria delle funzioni analitiche. Esso avrebbe pertanto guadagnato in chiarezza ed evitate facili critiche se l'A. vi avesse dato un titolo analogo a quello che ha dato al suo 5° capitolo, e cioè: «Lavori di matematici sovietici sulla teoria delle funzioni analitiche, in connessione con problemi di meccanica, di teoria delle funzioni di variabili reali e di teoria dei numeri».

Questi contributi sono spesso, come si è già accennato, veramente notevoli e parzialmente mal conosciuti in occidente, di guisa che la traduzione in tedesco dell'opera è pienamente giustificata. In particolare risulta convincente la tesi dell'A. che fa risalire a matematici russi, cominciando da J. W. Sochozki (1873), l'inizio dello studio dei valori «marginali» di funzioni analitiche definite da integrali del genere di quello che compare nella classica formula di Cauchy; studio che è d'importanza basilare per la risoluzione d'importanti classi di equazioni integrali singolari (Carleman, Muschelischwili, ecc.). Meno convincenti riescono invece altre tesi dell'A., p. es. l'eccessiva «enfasi» da lui posta sull'opera del grande Euler (chè, come tutti sanno, dimorò lungamente a Pietroburgo) nel periodo iniziale della teoria delle funzioni analitiche.

Comunque, l'operetta in esame fornisce qualche notizia interessante anche su avvenimenti matematici svoltisi fuori dell'àmbito sovietico. Per esempio, essa ci ricorda che la rappresentazione geometrica dei numeri complessi coi punti di un piano, prima che da Gauss e anche da Argand, fu usata nel 1799 dal topografo danese C. Wessel. Fortunatamente che i danesi sono gente saggia, se no ci sarebbe pericolo che qualcuno di essi cominciasse a chiamare il piano di Gauss «piano di Wessel», oppure «piano di Wessel-Argand-Gauss» o anche, più modernamente, «piano WAG», con quel gran vantaggio per la scienza che di leggieri si comprende!

FRANCESCO G. TRICOMI

Modern Computing Methods, Notes on Applied Science - N. 16 - Department of Scientific and Industrial Research, London 1957; pp. VI + 129; 10 s., 6 d.

Trattasi del 16*esimo* volumetto di una collezione del National Physical Laboratory (N.P.L.) di Teddington, Middlesex edita principalmente a servizio degli industriali e dei tecnici.

La materia è stata ricavata da un corso organizzato dall'Electrical Engineering Department of the Imperial College of Science and Technology dedicato al calcolo numerico e all'impiego delle macchine analogiche e digitali; alla preparazione del volumetto per la stampa hanno provveduto i membri della Divisione Matematica dell'N.P.L.

Il volumetto è suddiviso in dodici capitoli.

Nei primi due, sull'algebra lineare, sono contenuti i processi di eliminazione e di risoluzione dei sistemi fondati sull'impiego delle matrici; nel capitolo III° sul calcolo delle radici reali e complesse dei polinomi sono dati il classico metodo di Newton, il procedimento di Bairstow particolarmente adatto al calcolo delle radici complesse, quello di Graeffe e di Aitken-Bernoulli, e col capitolo IV° riguardante la ricerca degli autovalori delle matrici quadrate, in generale col metodo delle sostituzioni successive, e per il caso delle matrici quadrate simmetriche col metodo di Jacobi, si conclude l'esame dei problemi numerici pertinenti l'algebra.

Il capitolo V° è essenzialmente un repertorio delle formule di interpolazione di Newton, di Everett, delle formule di derivazione e di integrazione numerica.

Nel capitolo VI° è studiata la risoluzione numerica dei problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie, e nel successivo capitolo VII° sono richiamati i metodi numerici per la risoluzione del problema di Cauchy per le stesse equazioni.

Nel capitolo VIII°, introdotta per le equazioni alle derivate parziali lineari del secondo ordine in due variabili indipendenti la nozione di linee caratteristiche e la classificazione delle equazioni stesse nei tre tipi iperbolico, parabolico, ellittico, viene descritta la risoluzione numerica dei problemi ai limiti per quelle di tipo iperbolico, ottenuta operando sulle linee caratteristiche. Sono prese in particolare considerazione l'equazione delle corde vibranti e l'equazione del moto bidimensionale di un fluido supersonico comprimibile.

Nel capitolo IX° si passa dalle equazioni di tipo parabolico e di tipo ellittico alle corrispondenti equazioni alle differenze e sono descritti alcuni metodi risolutivi.

Nel capitolo X° un paragrafo è dedicato alla risoluzione dei sistemi normali di equazioni lineari col metodo delle approssimazioni successive e viene in proposito segnalata una variante dovuta ad A. C. Aitken particolarmente interessante nel caso di un gran numero di equazioni (120) aventi molti coefficienti nulli, mentre altri cinque paragrafi riguardano il metodo di rilassamento fondato soprattutto sull'abilità del calcolatore nella valutazione a priori dell'ordine di grandezza di alcune incognite.

Il capitolo XI° fornisce i criteri ai quali conviene attenersi nella costruzione delle tavole numeriche specialmente nei riguardi dell'interpolazione sulle tavole, e al calcolo delle funzioni per grandi valori delle variabili o nell'intorno di un punto singolare.

Il capitolo XII° infine tratta dei metodi più opportuni per il calcolo delle funzioni matematiche: è giustamente osservato che la scelta del metodo dipende essenzialmente dalla natura delle funzioni e dal gusto del calcolatore.

Una medesima funzione conviene rappresentarla sotto forme analitiche differenti in relazione agli intervalli nei quali deve essere valutata; per le serie lentamente convergenti si userà in alcuni casi la trasformazione di Eulero fondata sull'impiego delle differenze finite; per alcune classi di funzioni legate da relazioni ricorrenti converrà giovarsi di queste, per le funzioni rapidamente oscillanti, soluzioni di alcune equazioni differenziali lineari del secondo ordine, sarà utile ricorrere a particolari trasformazioni nelle quali intervengano l'ampiezza e la fase delle oscillazioni stesse.

A questi dodici capitoletti seguono tre Appendici.

L'Appendice 1, che occupa dieci pagine di stampa in carattere minuto, contiene un'accurata bibliografia di molte opere e memorie, soprattutto in lingua inglese, che si riferiscono sia alle teorie generali che alla materia specifica dei singoli capitoli del volumetto.

Le Appendici 2 e 3 descrivono le macchine possedute dalla Mathematical Division del N.P.L. e i problemi risolubili con esse, sia che questi problemi conducano a formule esplicite risolutive sia che essi si traducano in equazioni atte a caratterizzare le soluzioni stesse.

Questo volumetto che dà in sintesi una visione dei progressi finora realizzati in vari campi della teoria del calcolo numerico e nello stesso tempo porge ai tecnici utili indicazioni di natura applicativa, rappresenta per molti argomenti un'ottima guida bibliografica a chi voglia organizzare un corso sistematico sulla teoria, oggi di così alto interesse tanto nella matematica pura che nelle sue applicazioni.

GIOVANNI SANSONE

CLAUS MULLER, *Grundprobleme der mathematische Theorie elektromagnetischer Schwingungen,* Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in einzeldarstellungen Band LXXXVIII - Springer Verlag, 1957.

Nel presente volume sono esposte, in modo molto approfondito dal punto di vista matematico, alcune proprietà del campo elettromagnetico variabile, al trascorrere del tempo, con legge sinoidale. Dopo alcuni capitoli dedicati ad una esposizione, almeno in parte nuova, del calcolo vettoriale, delle funzioni sferiche e di Bessel, e delle soluzioni dell'equazione $\Delta U + U = 0$, si considera il campo elettromagnetico in un mezzo omogeneo e si ricavano alcune delle numerose formule che estendono quella classica di Green e che permettono di esprimere, in un certo dominio, il campo in funzione delle correnti (si introducono anche le correnti magnetiche che, per quanto fittizie, si presentano utili in molte questioni anche d'interesse pratico) e dei valori assunti dal campo stesso sulla frontiera del dominio. La discussione di queste formule conduce anche ad un'ampia trattazione delle correnti superficiali e dei campi vettoriali definiti su una superficie.

Segue un capitolo sul campo elettromagnetico in un mezzo non omogeneo argomento questo finora scarsamente studiato. Per quanto la trattazione si limiti a dimostrare (in base alla teoria delle trasformazioni lineari negli spazi funzionali opportunamente richiamata) teoremi di esistenza di unicità per speciali problemi, essa appare però di notevole interesse e non solo concettuale.

Non molto ampio invece lo studio nel campo elettromagnetico in una regione dello spazio qualora sia assegnato alla frontiera la componente tangenziale del campo elettrico o del campo magnetico; perciò il problema, importantissimo per la pratica, degli oscillatori a cavità è appena accennato. Il volume termina con alcune eleganti proprietà della polarizzazione del campo elettromagnetico a grande distanza dal generatore, proprietà ricavate mediante semplici considerazioni di analisi e di topologia.

Il libro è particolarmente adatto per chi desidera aggiornarsi su alcuni dei più recenti risultati ottenuti nella teoria del campo elettromagnetico, teoria la cui importanza, non solo scientifica, ma notevole anche per le applicazioni alla tecnica, diventa sempre più manifesta.

DARIO GRAFFI

A. D. MYSCHKIS, *Lineare Differentialgleichungen mit nacheilendem Argument*, Hochschulbücher für Mathematik, Band 17, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955; X + 180 Seiten, Mit 9 Abbildungen.

Si tratta della traduzione tedesca di una Monografia, pubblicata in lingua russa nel 1951, derivante da una rielaborazione, aggiornata a quella data, della Dissertazione tenuta dall'A. all'Università di Riga nel 1949.

La lettura richiede soltanto la conoscenza degli elementi dell'Analisi matematica e di alcune parti della teoria delle funzioni di variabile complessa e della teoria delle equazioni differenziali; alle proprietà fondamentali dell'integrale di Riemann-Stieltjes ed a quelle delle successioni ricorrenti, che ordinariamente formano oggetto di corsi specializzati, sono dedicate rispettivamente le Appendici 1 e 2 e l'Appendice 3.

Nel Cap. I sono date le proprietà generali delle equazioni lineari con argomento ritardato, cominciando dai teoremi di esistenza, di unicità e di dipendenza dai dati iniziali e dai secondi membri del sistema

$$(') \qquad y_i'(x) = \sum_{1}^{n}{}_j \int_0^\infty y_j(x-s)\,dr_j^i(x,s) + f_i(x),$$

$$y_i(A) = \varphi_i(A), \quad y_i(x-s) = \varphi_i(x-s), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

dove $r_j^i(x, s)$ è una matrice assegnata e l'integrale è di Riemann-Stieltjes. Al sistema (') è riconducibile la massima parte delle equazioni con argomento ritardato che interessano le applicazioni, e, in particolare, l'equazione omogenea del 1° ordine

$$y'(x) = \int_0^\infty y(x-s)\,dr(x,s) + f(x).$$

Di questa equazione non si sa molto nel caso generale (Cap. II) mentre nel caso omogeneo, $f(x) = 0$ (Cap. III e Cap. IV) è possibile stabilire, sotto particolari ipotesi sulla $r(x, s)$, dei teoremi di confronto, di oscillazione, di separazione degli zeri, ecc.

Il Cap. V studia l'equazione omogenea del 2° ordine

$$y''(x) = \int_0^\infty y(x-s)\,dr(x,s)$$

in un caso particolare (il cosidetto caso « periodico »).

Alle equazioni con coefficienti e «ritardo» costanti è infine dedicata l'Appendice 4.

Nonostante che la prima equazione differenziale con argomento ritardato possa essere attribuita ad Eulero, che la incontrò nel trattare il problema della determinazione di una curva simile alla propria evoluta, e nonostante che le equazioni di questo tipo vadano assumendo sempre maggiore importanza nella applicazioni della matematica, siamo tuttavia ancora ben lontani da una teoria organica e sviluppata quale è quella delle equazioni differenziali ordinarie. Come avverte lo stesso A. nell'Introduzione, questa Monografia vuol essere un primo contributo alla ricerca sistematica di una teoria qualitativa delle equazioni differenziali con argomento ritardato; la Monografia è perciò assai interessante oltre che per i risultati che vi si trovano raccolti anche e soprattutto per i temi di ricerca che la lettura di essa suggerisce.

La bibliografia posta alla fine del volume comprende solo i lavori principali, molti dei quali dovuti all'A., esistenti sull'argomento fino al 1950.

La veste tipografica è quella impeccabile della Collezione cui la Monografia appartiene.

Roberto Conti

J. W. S. Cassels, *An introduction to diophantine approximation*, N. 45 della Collezione «Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics» - Cambridge, University Press, 1957 - pagine x + 166; prezzo 22 scellini e 6 pence.

Questo volumetto si ripropone, come il titolo indica, di dare una informazione generale sulle tecniche più comuni e sui più salienti risultati nelle ricerche di approssimazione diofantea, tenendo un tono elementare che lo renda accessibile ad una ampia classe di studiosi. Si può dire grosso modo che le conoscenze presupposte nel lettore non vanno oltre quelle generalmente fornite nel primo biennio dei nostri corsi universitari, integrate con i primi rudimenti della teoria dei numeri; solo in qualche punto l'esposizione fa appello ad alcune nozioni, del resto assai elementari, tratte dalla teoria della misura (sostanzialmente è sufficiente il concetto di insieme di misura nulla, che del resto viene generalmente inserito nei programmi del primo biennio), e dai primi elementi della teoria dei numeri algebrici.

L'esposizione è divisa in otto capitoli che esamineremo qui distintamente, in forma succinta.

Il primo capitolo è destinato alle approssimazioni omogenee. La prima e maggior parte di esso è intesa soprattutto ad illustrare gli elementi della teoria delle frazioni continue e le sue applicazioni alle approssimazioni diofantee, e culmina con la dimostrazione del classico teorema di Hurwitz; una seconda parte, di minore estensione, reca i risultati fondamentali relativi alla approssimazione simultanea, fra cui spicca il ben noto teorema di Minkowski; per la dimostrazione si fa qui ricorso anche a nozioni tratte dalla geometria dei numeri. Va notato però che tali nozioni sono dall'Autore ordinatamente esposte, partendo sempre da basi del tutto elementari, in una appendice destinata appunto a vari complementi, come diremo meglio in seguito.

Il secondo capitolo è dedicato alla catena di Markoff. Le questioni che vi si riferiscono sono esposte con molta completezza, fino alla piena caratterizzazione di quella classe di irrazionali α, che si presentano come meno approssimabili mediante razionali, nel senso che per essi si ha:

$$\liminf q^2 \cdot | p/q - \alpha | > 1/3$$

al variare di p e q interi ($q \neq 0$).

Il terzo capitolo tratta della approssimazione non omogenea; il risultato principale è costituito dal classico teorema di Kronecker, che viene qui dimostrato nella forma più generale (per un sistema di n disuguaglianze lineari in m variabili).

Il capitolo quarto approfondisce i risultati del precedente entrando a trattare della distribuzione uniforme delle mantisse di espressioni del tipo: $p\alpha - q$, per α irrazionale fisso e p, q interi variabili. Introdotto il concetto fondamentale di discrepanza e dedottane una definizione, del resto molto intuitiva, di «uniforme distribuzione» (valida anche nel caso pluridimensionale), l'Autore espone i classici criteri di uniforme distribuzione di H. Weyl, che riguardano più in generale una qualunque successione di vettori, e ne deduce alcune più salienti conseguenze.

Il quinto capitolo riguarda i problemi che potremmo chiamare «di trasferimento»; essi trattano della possibilità di dare informazioni sulle disuguaglianze, di un certo tipo, a cui può soddisfare un certo sistema, note che siano altre disuguaglianze a cui soddisfa un altro sistema, legato al primo in modo opportuno. L'Autore si diffonde qui notevolmente, mostrando, con vari esempi, le numerose possibilità di applicazione di questa teoria agli argomenti toccati nei capitoli precedenti, e le sue relazioni con alcuni notevoli argomenti della geometria dei numeri.

Il sesto capitolo tratta della questione classica della approssimabilità dei numeri algebrici mediante razionali, questione che, come è noto, risale a Liouville, il quale ne prese lo spunto per la sua dimostrazione dell'esistenza di numeri trascendenti; tale questione fu poi ripresa, nel corso di un secolo, da numerosi valenti ricercatori (che la ricollegarono anche ad argomenti di analisi indeterminata), fra cui spiccano i nomi di Thue e Siegel, che migliorarono successivamente i risultati ad essa relativi. Scopo dell'Autore è qui quello di esporre per esteso il recente notevolissimo risultato di K. F. Roth, il quale, come è risaputo, ha dimostrato che, se α è algebrico, la disequazione $| p/q - \alpha | < 1/q^{2+\varepsilon}$ non può avere più che un numero finito di soluzioni in interi p, q per $\varepsilon > 0$.

Il settimo capitolo si riferisce a questioni collegate con teorie metriche: si tratta di valutare la misura dell'insieme dei numeri reali che soddisfano a certe condizioni di approssimabilità. L'argomento è assai ampio. Per necessità di cose l'Autore ha dovuto limitarsi ad una questione circoscritta, trattando, in modo per altro ben circostanziato, un classico problema che risale sostanzialmente a Borel.

L'ottavo capitolo tratta dei numeri così detti di Pisot-Vijayaraghavan. Si tratta, com'è ben noto di quei numeri algebrici (necessariamente reali) $\alpha > 1$, i cui coniugati sono tutti di modulo < 1. Questi numeri presentano notevoli caratteristiche (per esempio per quanto si riferisce alla approssimabilità delle loro potenze mediante numeri interi) che hanno formato oggetto di studio da parte di numerosi ricercatori in tempi recenti. Il nostro Autore riporta tre teoremi fra i più significativi e ne fornisce una esauriente trattazione.

Chiude il lavoro una appendice, divisa in tre parti destinata ad aggiornare il lettore su alcune delle nozioni non strettamente elementari, necessarie per la lettura del libro. La prima parte è di carattere algebrico e tratta delle basi di certi moduli; la seconda, cui abbiamo già accennato, fornisce alcune nozioni preliminari di geometria dei numeri, e la terza, ancora di carattere algebrico, richiama certe proposizioni sulla decomposizione di un polinomio nel dominio degli interi ordinari.

Concludendo si può affermare che il libro risponde bene agli scopi di informazione elementare cui è stato destinato. Gli argomenti trattati sono sempre svolti con lodevole completezza. Particolare cura ha posto l'Autore nella costante ricerca di dimostrazioni, per quanto possibile, agili e rispondenti al gusto più moderno, anche in argomenti classici. Per alcuni capitoli, per esempio il secondo, quinto e sesto, egli si è servito addirittura di manoscritti concessigli a tal uopo dagli autori, Rogers, Birch e Roth rispettivamente, di loro lavori, tuttora inediti o di recentissima pubblicazione. Per le numerose questioni che egli ha dovuto necessariamente omettere o trattare parzialmente, l'Autore ha cercato di supplire con sobri accenni e con rapidi rinvii ad opere più specializzate o a trattati più ampi.

MARCO CUGIANI

I.N. VEKUA, *Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben,* mit einer Anwendung in der Theorie der Schalen, Mathematische Forschungsberichte herausgegeben von prof. Dr. Heinrich Grelle, II, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956, 107 S.

Proseguendo nel lodevole intento di portare a conoscenza di una più vasta cerchia di lettori i più importanti lavori della letteratura matematica sovietica attraverso la loro traduzione tedesca, il Prof. H. Grell ha edito la presente Monografia che riproduce, con qualche lieve variante ed aggiunta, una Memoria pubblicata nel 1952 nella rivista Matematiceski Sbornik.

L'A. ben noto a quanti si occupano di equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, considera in questo lavoro un sistema di equazioni alle derivate parziali del primo ordine della forma (') $\partial u/\partial x - \partial v/\partial y = a(x, y)u + b(x, y)v + f(x, y)$, $\partial u/\partial y + \partial v/\partial x = c(x, y)u + d(x, y)v + g(x, y)$ e mostra che anche in ipotesi di sola continuità dei coefficienti a, b, c, d, f, g, le funzioni complesse $w(z) = u + iv$ della variabile complessa $z = x + iy$, con u e v soluzione di ('), conservano molte delle proprietà di struttura delle funzioni olomorfe. In altri termini, partendo dal sistema (') è possibile fondare una teoria delle funzioni che conserva i caratteri fondamentali di quella classica basata sul sistema di Cauchy-Riemann $\partial u/\partial x - \partial v/\partial y = 0$, $\partial u/\partial y + \partial v/\partial x = 0$.

L'A. studia inoltre, in ipotesi di notevole generalità sui dati, un problema di grande attualità, noto come problema di Riemann-Hilbert, consistente nell'associare al sistema (') una condizione $\alpha(P)u + \beta(P)v = \gamma(P)$, con α, β, γ funzioni reali del punto P variabile sulla frontiera di un dominio assegnato e con $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Dei risultati, ottenuti mediante la riduzione ad equazioni integrali, viene poi fatta applicazione ad un problema di elasticità.

Per ultimi vengono studiati i sistemi (') con a, b, c, d, f, g funzioni analitiche. Chiude la Monografia una bibliografia di oltre 50 voci comprendente anche una lista di lavori apparsi tra la pubblicazione della Memoria originale e quella della presente traduzione.

ROBERTO CONTI

J. L. SYNGE, *The Hypercircle in Mathematical Physics*, (Cambridge University Press, 1957), p. XII + 424.

Il metodo dell'ipercerchio, ideato dall'autore di questo libro e da W. Prager una decina di anni or sono (1) serve a trovare soluzioni approssimate dei classici problemi di valori al contorno della fisica matematica. La soluzione viene individuata, in un opportuno spazio funzionale, come il punto d'intersezione di due sottospazi lineari. Per esempio, nel caso del problema di Dirichlet, il primo sottospazio L' è quello dei vettori gradienti di funzioni scalari che soddisfano la condizione al contorno, mentre il secondo sottospazio L'' è quello dei vettori a divergenza nulla. Ora L' e L'' possono essere approssimati mediante due sottospazi lineari L_r', L_s'' ciascuno con un numero finito di dimensioni. Fissata una metrica nello spazio funzionale, si possono trovare i due punti V' di L' e V'' di L'' tali che la distanza $|V' - V''|$ sia minima. Allora si dimostra che il punto rappresentativo della soluzione si trova su un ipercerchio che passa per V' e V'' e del quale si sa determinare il centro e il raggio. La superiorità di questo metodo rispetto ad altri procedimenti di approssimazione consiste nel fatto che si sa limitare l'errore commesso nello scegliere una data soluzione approssimata (per esempio, il centro dell'ipercerchio).

Nel primo capitolo l'autore introduce i concetti generali dello spazio funzionale, mentre nel secondo ne sviluppa la geometria nel caso che la metrica sia definita positiva (cioè nel caso che tale risulti per definizione il prodotto scalare di due funzioni). Nel terzo capitolo il metodo dell'ipercerchio viene applicato al problema di Dirichlet, introducendo le così dette funzioni piramidali, cioè speciali funzioni settorialmente lineari, che si prestano facilmente a costruire i sottospazi lineari L_r', L_s''. Il quarto capitolo tratta di problemi misti e di problemi biarmonici con esempi di applicazioni al flusso viscoso e all'equilibrio elastico. Gli ultimi due capitoli sono dedicati allo spazio funzionale con metrica Minkowskiana, che si presta alla trattazione dei problemi di vibrazione. Ma in realtà, cessando in questo caso la possibilità di limitare l'errore, il metodo dell'ipercerchio sembra offrire ben scarsi vantaggi.

L'esposizione è estremamente chiara e il libro risulta di facile lettura anche per colui che non abbia cognizioni troppo specializzate. La visualizzazione geometrica del problema analitico e la dovizia di esempi sviluppati dall'autore lo rendono utilissimo per chi si occupa di matematica applicata.

GIULIANO TORALDO DI FRANCIA

(1) W. Prager & J. L. Synge, *Approximations in Elasticity Based on the Concept of Function Space*, *Quart. Appl. Math.*, 5, 241 (1947).

LIBRI RICEVUTI

Boltjanski W. G., *Differentialrechnung einmal anders*, pp. IV + 60, Ed. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

Carathéodory C., *Variationsrechnung und Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung*, Band I°, pp. VII + 171, Ed. B. G. Teubner, Leipzig, 1956.

De Marco G., *Il calcolo dell'infinitamente grande*, vol. I°, pp. 1-221, Ed. A. Traini, Napoli, 1938, vol. II°, pp. 1-136, Ed. Tip. La Floridana, Napoli, 1956.

Duschek A., *Höhere Mathematik*, I° Band, pp. XI + 440, Ed. Springer Verlag, Wien, 1956.

Lichnerowicz A., *Lineare Algebra und lineare Analysis*, pp. XI + 303, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956. (Traduzione dell'opera francese edita nel 1947).

Littlewood J. E., *The elements of the theory of real functions*, pp. VI + 71, Ed. Heffer & Sons, Cambridge, 1956.

Ljapunow A. A., Stschegolkow E. A., Arstenin W. J. und Ljapunow A. A., *Arbeiten zur Deskriptiven Mengenlehre*, pp. 1-108, Ed. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1955.

Markuschewitsch A. I., *Komplexe Zahlen und Konforme Abbildungen*, pp. 1-56, Ed. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

Norden A. P., *Differentialgeometrie*, Teil. I°, pp. VIII + 135, Ed. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

Riesz F., Nagy B. S., *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, pp. XI + 481, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956. (Traduzione dell'opera francese edita nel 1955).

Schafarewitsch I. R., *Ueber die Auflösung von Gleichungen Höheren Grades*, pp. 1-29, Ed. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

Scherwatow W. G., *Hyperbelfunktionen*, pp. 1-53, Ed. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

Specht W., *Elementare Beweise der Primazhalsätze*, pp. 1-78, Ed. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

Tricomi F. G., *Lezioni di Analisi Matematica*, vol. I°, pp. VII + 381, vol. II°, pp. X + 360, Ed. C.E.D.A.M., Padova, 1956.

Vogel A., *Klassische Grundlagen der Analysis*, pp. IX + 194, Ed. S. Hirzel Verlag, Leipzig. 1952.