
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BARTOLOMEO TODESCHINI

Rappresentazione geometrica della labilità dei sistemi meccanici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 12
(1957), n.4, p. 596–603.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_596_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Rappresentazione geometrica della labilità dei sistemi meccanici.

Nota di BARTOLOMEO TODESCHINI (a Milano)

Sunto. - Vedi l'introduzione.

Summary. - *A geometrical description of mechanical systems' lability owed to charge parameters' variation is given. One, two, ... freedom degrees systems, with one, two, ... charge parameters are considered, and common characters are pointed out.*

La posizione di un sistema olonomo (a vincoli lisci) sia individuata, in maniera biunivoca e continua, da m coordinate libere $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Il sistema sia soggetto a sollecitazione attiva conservativa e l'energia potenziale dipenda in modo noto da n parametri di carico F, G, H, \dots .

Le posizioni di equilibrio, stabile od instabile, dipenderanno da tali parametri. Potranno poi esistere stati estremi di equilibrio, tali che pur piccole variazioni dei parametri di carico impediscono al sistema di trovare posizioni di equilibrio prossime, e il sistema é costretto a cercare una eventuale lontana configurazione di equilibrio: sono gli stati in cui il sistema dicesi labile (¹).

Di questo voglio dare nella presente Nota una illustrazione geometrica, distinguendo i casi di 1, 2, ... gradi di libertà con 1, 2, ... parametri di carico (variabili indipendentemente l'uno dall'altro), e mettendo in luce quanto v'è di comune nei vari casi. Qualche semplice esempio chiarirà l'esposizione.

1. Cominciamo a considerare il caso in cui v'è una sola coordinata libera α , ed un solo parametro di carico F , assegnato, s'intende, indipendentemente da α (²).

Un esempio é dato semplicemente da un punto materiale vincolato senza attrito ad un asse e soggetto, oltre che a forze attive posizionali date, anche ad un carico, il quale forma con l'asse un angolo funzione nota della posizione, ma ha intensità F assegnabile a piacere indipendentemente dalla posizione. Un altro esem-

(¹) V. O. ZANABONI, *Qualche considerazione sui fenomeni detti di instabilità progressiva*, « Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano », XXVIII (1956-57).

(²) V. O. ZANABONI, op. cit.

pio é costituito da un'asta rigida, girevole in un piano verticale attorno ad un estremo ed appoggiata per l'altro estremo ad un pilastro cedevole, la quale regga un dato peso, posto ad una distanza F , assegnabile a piacere, dal primo estremo ⁽³⁾.

Detta W l'energia totale attiva, sarà

$$(1) \quad W = W(\alpha; F).$$

Le situazioni di equilibrio, in corrispondenza ai vari valori assegnati al parametro di carico, sono quelle per cui

$$(2) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} \equiv W_{\alpha} = 0$$

e rappresentano sul piano (α, F) una linea (v. fig. 1).

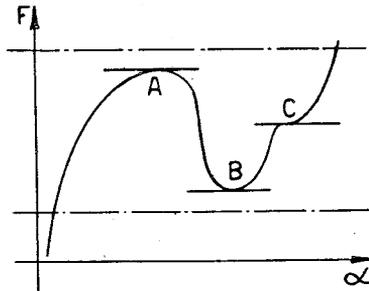


Fig. 1.

Consideriamo, su tale linea, i punti in cui

$$(3) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} \equiv W_{\alpha\alpha} = 0.$$

Tra questi punti si trovano quelli che separano gli archi ove l'equilibrio é stabile, da quelli ove é instabile (perchè, com'è noto, l'equilibrio é stabile se $W_{\alpha\alpha} > 0$). Dei detti punti, quelli ove é $W_{\alpha F} \neq 0$ sono di stazionarietà per la $F(\alpha)$ definita implicitamente dalla (2); é infatti

$$(4) \quad \frac{dF}{d\alpha} = - W_{\alpha\alpha} / W_{\alpha F}.$$

Di essi quelli che corrispondono ad un massimo o ad un minimo relativo per $F(\alpha)$ rappresentano situazioni in cui il sistema é labile di fronte ad un aumento o rispettivamente ad una diminu-

⁽³⁾ Altri esempi ancora si possono trovare nella citata conferenza di ZANABONI e nel testo di O. BELLUZZI: *Scienza delle costruzioni*, Vol. 4°, Bologna (1955).

zione del carico F , come mette bene in evidenza la fig. 1 (punti A e B) (4).

Supponiamo, in particolare, che la dipendenza dell'energia totale attiva W dal parametro di carico F sia lineare, cioè

$$(1') \quad W = V(\alpha) + F f(\alpha),$$

essendo $V(\alpha)$ l'energia potenziale di quella parte della sollecitazione attiva, che non dipende dal carico. È questo il caso che si presenta, ad esempio, quando il carico è costituito da una forza avente intensità F indipendente dalla posizione del sistema e direzione funzione nota di questa: allora $f(\alpha)$ è l'energia potenziale della forza per unità di intensità. Supponiamo inoltre, per semplicità, che $f'(\alpha)$ abbia sempre lo stesso segno (almeno nell'intervallo di valori di α che interessa), ad es., per fissare le idee, sia sempre $f'(\alpha) < 0$. In tali ipotesi, la condizione di equilibrio (2) è senz'altro esplicitabile rispetto ad F ,

$$(2') \quad F = -V'(\alpha)/f'(\alpha),$$

e si ricava immediatamente che

$$(5) \quad W_{\alpha\alpha} = -f''(\alpha) \frac{dF}{d\alpha}.$$

Quindi, sopra il diagramma della funzione (2') (v. fig. 1), i punti di massimo e di minimo relativo di F (come A e B) separano i tratti di equilibrio stabile da quelli di equilibrio instabile, essendo i primi quelli ove la funzione è crescente, i secondi quelli ove è decrescente; questi punti rappresentano, come nel caso generale, le situazioni in cui il sistema è labile.

Tornando al caso di una generica dipendenza di W da F , per rendere possibile il confronto coi casi più complessi che verranno studiati in seguito fissiamo l'attenzione sul solo asse del carico F . L'equazione di equilibrio (2) pone in corrispondenza i punti di questo asse, rappresentanti i valori di F , coi valori di α , e dove $W_{\alpha\alpha} \neq 0$, per il teorema del DINI, risulta definita, in un intorno dei valori (F , α) considerati, una sola funzione $\alpha(F)$. Supponiamo,

(4) Se in un punto della linea (2) è insieme $W_{\alpha\alpha} = 0$ e $W_{\alpha F} = 0$, quel punto è singolare per la linea. Limitandomi al caso che si tratti di un punto doppio, osservo che, se esso è isolato, rappresenta una situazione di labilità di fronte a variazioni del carico di segno qualsiasi; se corrisponde ad una cuspide, può rappresentare una situazione di labilità di fronte a variazioni del carico di un dato segno; mentre, se corrisponde ad un nodo, non è mai situazione di labilità.

viceversa, $W_{\alpha\alpha} = 0$; il sistema della (2) e della (3) ($W_{\alpha} = 0, W_{\alpha\alpha} = 0$), ove si elimini α , individua sull'asse F un insieme di punti, tra i quali vi sono quelli di diramazione per $\alpha(F)$; e quelli che danno i valori del carico, per i quali il sistema può presentare labilità.

2. Consideriamo il caso in cui v è ancora una sola coordinata libera α , ma i parametri di carico sono due, F e G , assegnabili, s'intende, indipendentemente l'uno dall'altro e da α .

Sarà

(6)
$$W = W(\alpha; F, G).$$

Le situazioni di equilibrio sono quelle per cui

(7)
$$W_{\alpha} = 0$$

e rappresentano nello spazio (α, F, G) una superficie (v. fig. 2).

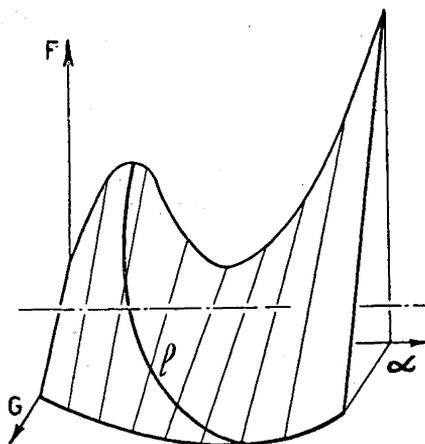


Fig. 2.

Consideriamo, su questa superficie, la linea l individuata dalla condizione

(8)
$$W_{\alpha\alpha} = 0;$$

essendo $W_{\alpha\alpha}$ proporzionale al coseno dell'angolo che la normale alla superficie (7) forma con l'asse α , tale linea non è altro che il *contorno apparente* della superficie, secondo l'asse α . Poiché l'equilibrio è stabile ove $W_{\alpha\alpha} > 0$, possiamo dire che, genericamente, la linea l separa, sulla superficie di equilibrio (7), le regioni di equilibrio stabile da quelle di equilibrio instabile; essa è luogo di punti di stazionarietà per $F^2 + G^2$ sopra ciascun semipiano

passante per l'asse α ; i suoi punti rappresentano situazioni ove il sistema può risultare labile, come ben mostra la fig. 2.

Fissiamo ora l'attenzione unicamente sul piano dei carichi (F, G) . L'equazione di equilibrio (7) fa corrispondere, in questo piano, ai diversi valori di α una famiglia di linee, sezioni della superficie (7) coi piani $\alpha = \text{cost.}$ (v. fig. 3): sono le linee che rap-

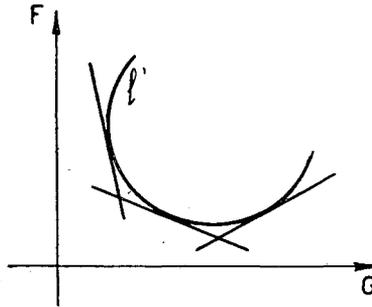


Fig. 3.

presentano in proiezione quotata la superficie d'equilibrio (7). Il sistema della (7) e della (8) ($W_\alpha = 0$, $W_{\alpha\alpha} = 0$), ove si elimini α , individua l'inviluppo l' della famiglia, il quale è proiezione del contorno apparente l sul piano (F, G) . Tale inviluppo l' è linea di diramazione per $\alpha(F, G)$; i suoi punti rappresentano situazioni di carico in cui il sistema risulta labile: esso infatti si mette in moto non appena i carichi vengono alterati in modo da spostare verso una certa banda di l' il punto che li indica.

Supponiamo, in particolare, che la dipendenza dell'energia totale attiva W dai parametri di carico F e G sia lineare,

$$(6') \quad W = V(x) + Ff(x) + Gg(x),$$

come avviene quando i carichi sono costituiti da due forze aventi intensità F e G indipendenti dalla posizione del sistema e direzioni funzioni note di questa. Allora la superficie di equilibrio (7) è una rigata formata da tante rette parallele al piano (F, G) (come nella fig. 2), e sul piano (F, G) le linee $\alpha = \text{cost.}$ sono di conseguenza delle rette (come appunto nella fig. 3).

Ad esempio, si consideri un punto materiale vincolato senza attrito ad un asse α e sottoposto, oltre che ad una forza elastica di dato coefficiente k , che lo attira verso l'origine O sopra l'asse, anche a due forze di intensità F e G assegnabili a piacere, di cui la prima è diretta come l'asse e la seconda forma con questo

l'angolo ϑ tale che $\cos \vartheta = \alpha^2/\lambda^2$ (λ cost.), funzione nota della posizione. In questo esempio, la dipendenza di W da F e G é lineare, risultando

$$W = \frac{k}{2} \alpha^2 - F\alpha - G \frac{\alpha^3}{3\lambda^2};$$

la linea l' che dà sul piano dei carichi le situazioni di labilità é l'iperbole

$$4FG = k^2\lambda^2,$$

e le sue tangenti sono le linee $\alpha = \text{cost.}$

Quando W , a meno di un fattore che non contiene α , dipende dai parametri di carico solo attraverso il loro rapporto F/G (come avviene nel caso (6') della dipendenza lineare se $V(\alpha) = 0$) la superficie di equilibrio (6) (o (6')) ha come intersezioni coi piani $G = \text{cost.}$ delle linee che presentano gli stessi caratteri, differendo unicamente per la scala lungo l'asse F ; si torna così alla rappresentazione data dalla fig. 1 e alla descrizione del n. 1, com'è ben naturale, poiché funge da unico parametro di carico il rapporto F/G .

3. Se i parametri di carico sono tre, $F G H$, sempre con una sola coordinata libera α , l'equazione di equilibrio

$$(9) \quad W_\alpha = 0$$

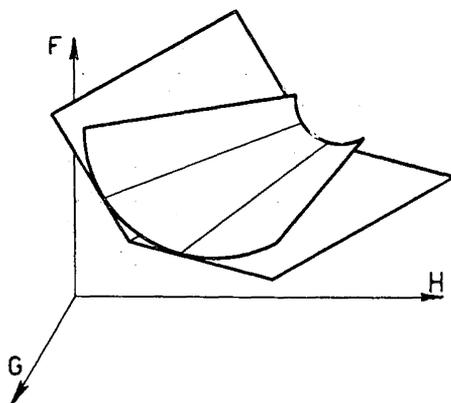


Fig. 4.

rappresenta nello spazio dei carichi (F, G, H) una famiglia di superficie dipendenti dal parametro α (v. fig. 4). Il sistema

$$(10) \quad W_\alpha = 0, \quad W_{\alpha\alpha} = 0$$

individua la superficie involuppo della famiglia; i suoi punti

sono di diramazione per la funzione $\alpha(F, G, H)$, e rappresentano le situazioni di carico per le quali il sistema risulta labile. Quando W dipende linearmente da F, G, H , la (9) rappresenta nello spazio dei carichi una famiglia di piani, dipendente da α (come nella fig. 4), e la superficie involuppo (10) che dà le situazioni di labilità é una rigata sviluppabile.

E così via. Se un sistema ad un sol grado di libertà é soggetto ad n carichi, l'equazione (9) di equilibrio rappresenta nell'iperspazio dei carichi una famiglia di ipersuperficie (di iperpiani, nel caso lineare) dipendente dalla coordinata libera α . L'involuppo (10) di questa famiglia é un'ipersuperficie, nei cui punti il sistema risulta labile. Si noti che, genericamente, per $n \geq 3$ c'è modo di alterare i carichi senza uscire da una data posizione di labilità: basta spostarsi lungo la varietà di contatto tra la (9) e l'involuppo (10).

4. Passo ora, dai sistemi ad un sol grado di libertà, a quelli aventi due gradi di libertà. Le coordinate libere siano α e β , e vi sia dapprima un sol parametro di carico F .

L'energia totale attiva sarà funzione di α, β ed F :

$$(11) \quad W = W(\alpha, \beta; F).$$

Le situazioni di equilibrio sono quelle per cui

$$(12) \quad W_\alpha = 0, \quad W_\beta = 0$$

e rappresentano nello spazio (α, β, F) una linea.

Differenziando le (12) si ottiene

$$W_{\alpha\alpha}d\alpha + W_{\alpha\beta}d\beta + W_{\alpha F}dF = 0, \quad W_{\alpha\beta}d\alpha + W_{\beta\beta}d\beta + W_{\beta F}dF = 0.$$

Di qui si vede che, perché un punto della linea sia di stazionarietà per la F , é necessario e genericamente sufficiente ⁽⁵⁾ che risulti

$$(13) \quad J \equiv W_{\alpha\alpha}W_{\beta\beta} - W_{\alpha\beta}^2 = 0.$$

Osserviamo che J non é altro che l'Hessiano di W . Ne segue che i punti di stazionarietà della F , ove é conformemente alla (13), $J=0$, separano i tratti di linea ove l'equilibrio é stabile da quelli ove é instabile: infatti tali punti separano gli archi in cui é

⁽⁵⁾ I punti della linea (12), in cui fosse verificata, accanto alla (13), anche la relazione $W_{\alpha F}W_{\beta\beta} - W_{\beta F}W_{\alpha\beta} = 0$, sarebbero singolari ed andrebbero studiati a parte, analogamente a quanto é stato accennato nella nota a piè di pagina ⁽⁴⁾ per il caso di un sol grado di libertà.

$J < 0$ da quelli in cui $J > 0$; nei primi l'equilibrio \acute{e} sicuramente instabile (per il teorema di LJAPUNOV), non essendo minima la W ; ciascuno dei secondi, poi, corrisponde tutto a stabilit\`a o ad instabilit\`a: perch\`e i punti dove $W_{\alpha\alpha} = 0$ appartengono agli archi ove $J < 0$. I punti di massimo o minimo per la F sono quelli dove il sistema \acute{e} labile.

Si pu\`o fissare l'attenzione sul solo asse del carico F . Le equazioni di equilibrio (12) pongono in corrispondenza i punti di questo asse, rappresentanti i valori di F , con le coppie di valori (α, β) , e poich\`e J \acute{e} (oltre che l'Hessiano di W) lo Jacobiano $d(W_{\alpha}, W_{\beta})/d(\alpha, \beta)$, dove $J \neq 0$ le (12) individuano, nell'intorno dei valori (F, α, β) che si considerano, una sola coppia di funzioni $\alpha(F)$ $\beta(F)$. Consideriamo viceversa il sistema (12) (13) ($W_{\alpha} = 0, W_{\beta} = 0, J = 0$); ove si eliminino α e β , esso individua sull'asse F un insieme di punti, tra i quali vi sono quelli di diramazione per $\alpha(F)$ $\beta(F)$, e quelli che corrispondono a situazioni di labilit\`a.

5. Sempre con due coordinate libere α e β , vi siano due parametri di carico F e G . Il sistema

$$(14) \quad W_{\alpha} = 0, \quad W_{\beta} = 0 \qquad (15) \quad J = 0$$

rappresenter\`a, sul piano dei carichi, una linea, luogo di punti di diramazione per le funzioni $\alpha(F, G)$ $\beta(F, G)$ definite implicitamente dalle (14), e luogo di punti di labilit\`a.

Se i parametri di carico sono in numero di n , il sistema (14) (15) rappresenta naturalmente un'ipersuperficie nell'iperspazio dei carichi (una superficie nello spazio, se i parametri di carico sono tre).

6. Siano ora tre le coordinate libere, α β γ . I parametri di carico, F, \dots , possono essere in numero di uno, due, tre, \dots .

Il sistema

$$(16) \quad W_{\alpha} = 0, \quad W_{\beta} = 0, \quad W_{\gamma} = 0$$

$$(17) \quad J \equiv d(W_{\alpha}, W_{\beta}, W_{\gamma})/d(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

individua un'ipersuperficie nello spazio dei carichi (un insieme di punti su di una retta, se c' \acute{e} un solo parametro di carico, una linea in un piano, se ve ne sono due, una superficie nello spazio, se ve ne sono tre). Essa \acute{e} luogo di punti di diramazione per le funzioni $\alpha(F, \dots)$ $\beta(F, \dots)$ $\gamma(F, \dots)$ definite dalle (16). Essa rappresenta le situazioni in cui il sistema \acute{e} labile.

Niente cambia se i gradi di libert\`a, anzich\`e tre, sono quattro, cinque, \dots .