Bollettino Unione Matematica Italiana

Delfina Roux

Sopra-emisimmetria di tratti con eccezioni e teorema di Fabry.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **12** (1957), n.4, p. 627–635.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_627_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

Sopra-emisimmetria di tratti con eccezioni e teorema di Fabry.

Nota di DELFINA ROUX (a Milano)

Sunto. - *Si assegna una condizione sufficiente per la localizzazione di un punto singolare sulla circonferenza di convergenza: tale condizione generalizza il classico teorema di* E. FABRY *e tiene conto della «sopra-emisimmetria» dei tratti anche nel caso in cui essa soffra delle eccezioni.*

Summary. - *A sufficient condition is given for $z = 1$ as a singular point of a power-series. This condition generalizes* FABRY'*s Theorem and it considers an «over-skewsimmetry» of the sequences* $\{ a'_m \}$, $(1-\theta)n_k < m < (1+\theta)n_h$, $a'_m = Re(a_m e^{-i\gamma_h})$, *with or without exceptions.*

1. Introduzione.

La serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (\overline{\lim} \mid a_n \mid^{1/n} = 1)$$

abbia raggio di convergenza 1.

In una precedente Nota (1) abbiamo stabilito due criteri sufficienti del tipo di E. FABRY per la singolarità del punto 1: il primo di questi (vedi Teor. I in (1)) generalizza un criterio di G. PÓLYA (2) riguardante i tratti unilaterali nei quali sono ammesse non troppe «variazioni di segno», mentre il secondo (vedi Teor. II in (1)) invoca come condizione una cosiddetta «sopra-emisimmetria» sui tratti senza eccezioni, come era stata considerata in G. RICCI (3): questo secondo Teorema venne dimostrato seguendo un metodo di G. SZEGÖ e H. CLAUS (4).

(1) D. ROUX, *Lacune unilaterali, emisimmetria di tratti e teorema di Fabry,* «Bollettino U. M. I.», (3), **9** (1954), pp. 399-408.

(2) G. PÓLYA, *Über gewisse notwendige Kriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe,* «Mathem. Annalen», **99**, (1928), pp. 687-706. In particolare p. 703, nota (18).

(3) G. RICCI, *Emisimmetria di tratti e teorema di Vivanti-Pringsheim-Hadamard-Fabry relativo ai punti critici,* «Bollettino U. M. I.», (3), **9**, (1954), pp. 126-135.

(4) Per ulteriori indicazioni rinviamo ai loc. cit. in (1), (2) e (3).

In questa Nota si stabiliscono criteri nei quali la « sopra-emisimmetria » su ricordata ammette non troppe eccezioni: la presenza di queste non troppe eccezioni essendo intesa come possibilità di ripristinare la « sopra-emisimmetria » mediante appropriati « ribaltamenti ».

2. I due criteri sufficienti.

Dimostreremo i due seguenti teoremi

TEOREMA I. - *La serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (\overline{\lim} \mid a_n \mid^{1/n} = 1)$$

abbia raggio di convergenza 1.

Il punto $z = 1$ *è singolare se è possibile determinare*

a) una successione crescente $\{ n_h \}$ *di indici* $n_1, n_2, n_3, \dots$.

b) una successione crescente $\{ \gamma_h \}$ *di numeri reali (orientazioni)* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$.

c) un numero reale θ, $0 < \theta < 1$,

tali che, considerati i tratti

$$I_h \equiv (1 - \theta) n_h < m < (1 + \theta) n_h \qquad (h = 1, 2, 3, \dots) \tag{2.1}$$

e posto

$$Re(a_m e^{-i\gamma_h}) = a'_m \quad per \quad m \in I_h \tag{2.2}$$

si abbia:

$$(A) \qquad | a'_{n_h} |^{1/n_h} \to 1 \quad per \quad h \to +\infty$$

(B) detto v_h *il numero delle variazioni di segno presentate dalla successione finita di numeri reali (trascurando gli eventuali elementi nulli)*

$$a'_{n_h + u} \qquad (u = 0, 1, 2, \dots, [\theta n_h]) \tag{2.3}$$

risulti

$$v_h / n_h \to 0 \quad per \quad h \to +\infty. \tag{2.4}$$

$$(C) \qquad | a'_{n_h - u} | \leqq | a'_{n_h + u} | \qquad (u \geqq 0;\ n_h \mp u \in I_h;\ h = 1, 2, 3, \dots).$$

OSSERVAZIONE. - In questo criterio, oltre alla presenza in I_h del coefficiente centrale a componente preponderante richiesta dalla (A), si intende sfruttare la proprietà che le componenti $a'_{n_h - u}$ dei coefficienti $a_{n_h - u}$ contenuti nella prima metà del tratto I_h non superano le componenti a'_{n_h+u} di quelli corrispondenti contenuti nella seconda metà. La condizione v_h/n_h è della natura consueta.

Notiamo però che, in questo Teorema I, seguendo un altro impianto dimostrativo, è possibile eliminare la condizione (C): le due condizioni (A) e (B) sono infatti quelle che figurano nelle ipotesi di un analogo teorema dimostrato in (1) (vedi Teor. I in (1), caso delle lacune unilaterali a destra).

TEOREMA II. - *Vale il criterio analogo a quello espresso dal Teorema I e ottenuto da questo sostituendo alle condizioni* (B) *e* (C) *le due seguenti:*

(B^*) *detto* v_h *il numero delle variazioni di segno presentate dalla successione finita di numeri reali (trascurando gli eventuali elementi nulli)*

$$a'_{n_h-u} + a'_{n_h+u} \qquad (u = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ [\theta n_h]) \tag{2.5}$$

risulti

$$v_h/n_h \to 0 \quad per \quad h \to +\infty; \tag{2.6}$$

(C^*) *esista una funzione* $\psi(n)$ *crescente e divergente a* $+\infty$ *(lentamente quanto si vuole) tale che i due numeri reali*

$$a'_{n_h-u} + a'_{n_h+u}, \quad a'_{n_h-u} + e^{u\{v_h+\psi(n_h)\}/n_h}\ a'_{n_h+u}$$
$$(n_h \mp u \in I_h; \quad h = 1,\ 2, \ldots)$$

(se non nulli) abbiano lo stesso segno.

OSSERVAZIONI. - 1°) La condizione (A) è richiesta anche in questo Teorema II.

2°) È evidente che la validità di (C^*) è assicurata quando essa sia soddisfatta da quei valori di u pei quali i due numeri reali a'_{n_h-u} e a'_{n_h+u} hanno segno contrario e la somma $a'_{n_h-u} + a'_{n_h+u}$ ha il segno di a'_{n_h-u}: cioè, formalmente, per quei valori di u tali che

$$a'_{n_h-u} \cdot a'_{n_h+u} \leqq 0, \quad |a'_{n_h-u}| \geqq |a'_{n_h+u}|.$$

3°) Quando è verificata la (C), ogni numero $a'_{n_h-u} + a'_{n_h+u}$ (se non è nullo) ha il segno di a'_{n_h+u} ed essendo in ogni caso $\exp\{u(v_h + \psi(n_h))/n_h\} > 1$, risulta verificata la (C^*). Inoltre, se vale la (B), è verificata anche la (B^*) poichè, ancora, $a'_{n_h-u} + a'_{n_h+u}$ ha il segno di a'_{n_h+u}. Pertanto il Teorema I è un corollario del Teorema II. Basterà dimostrare quest'ultimo.

4°) È evidente che le condizioni (B) e (C), oppure (B^*) e (C^*) risultano verificate anche quando, in luogo di $\theta (0 < \theta < 1)$, si considera un nuovo numero θ' positivo minore di θ.

3. Dimostrazione del Teorema II.

Fissato un intero $h \geqq 1$, consideriamo il tratto

$$I_h \equiv (1 - \theta) n_h < m < (1 + \theta) n_h$$

e diciamo

$$u_t^* \qquad (t = 0, 1, \dots, v_h)$$

gli interi u tali che il numero $a'_{n_h - u} + a'_{n_h + u}$ non sia nullo e sia seguito (quando si trascurino gli zeri) dall'analogo numero di segno contrario.

Tralasceremo talvolta di scrivere l'indice h quando ciò non diminuisca la chiarezza.

Consideriamo i $2v$ numeri

$$\rho = n_h \mp \left(u_t^* + \frac{1}{2}\right) \qquad (t = 0, \dots, v;\ u^*_t = u^*_{h, t})$$

collocati simmetricamente rispetto a n_h e consideriamo il polinomio

$$P_h(z) = \prod_{\rho \in I_h} \left(1 - \frac{z^2}{\rho^2}\right) = \prod_{\rho \in I_h} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \cdot \prod_{\rho \in I_h} \left(1 + \frac{z}{\rho}\right) = P_{0,h}(z) \cdot P_{1,h}(z)$$

dove

$$(3.3) \qquad \left\{ \begin{aligned} P_{0,h}(z) &= \prod_t \left(1 - \frac{z}{n_h - u_t^* - 1/2}\right)\left(1 - \frac{z}{n_h + u_t^* + 1/2}\right) \\ P_{1,h}(z) &= \prod_t \left(1 + \frac{z}{n_h - u_t^* - 1/2}\right)\left(1 + \frac{z}{n_h + u_t^* + 1/2}\right). \end{aligned} \right.$$

Osserviamo che $P_{0,h}$ è un polinomio pari dell'argomento $z - n_h$; cioè $P_{0,h}(n_h - u) = P_{0,h}(n_h + u)$.

Per il modo come sono stati scelti i numeri ρ si verifica la circostanza che la successione finita di numeri reali

$$(3.4) \qquad P_{0,h}(n_h \mp u) \cdot (a'_{n_h - u} + a'_{n_h + u}) \qquad (u = 0, 1, \dots, [\theta n_h])$$

non presenta alcuna variazione di segno.

Se $v_h = 0$ si ponga $P_h(z) \equiv P_{0,h}(z) \equiv P_{1,h}(z) \equiv 1$.

Consideriamo il prodotto infinito (eventualmente un polinomio se $v_h = 0$ per h abbastanza grande, caso elementare già noto ([3]))

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} g(z) &= \prod_{h=1}^{\infty} P_h(z) = \prod_{s=1}^{h-1} P_s(z) \cdot P_h(z) \cdot \prod_{s=h+1}^{\infty} P_s(z) \\ &= A_h(z) \cdot P_h(z) \cdot B_h(z). \end{aligned}$$

Essendo $v_h/n_h \to 0$ è noto che (i) $g(z)$ è una funzione intera; (ii) $\overline{\lim} \mid g(n_h) \mid^{1/n_h} \geqq 1$; (iii) se il punto $z = 1$ è regolare per l'elemento analitico $f(z)$ esso è regolare anche per

$$(3.6)\qquad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(n) z^n.$$

Dunque, con l'introduzione di $g(z)$ e col seguire lo schema classico, basterà dimostrare che $z = 1$ è singolare per $F(z)$ e, a tal fine, è sufficiente dimostrare la seguente relazione di limite

$$(3.7)\qquad \overline{\lim} \mid S_h(\theta) \mid^{1/n_h} \geqq 1$$

per la « somma di FABRY » di $F(z)$

$$S_h(\theta) = \sum_{m \in I_h} c_{n_h, m}\, g(m) a'_m$$

$$c_{n_h, m} = \frac{n_h !\, n_h !}{m !\, (2n_h - m) !} = \frac{n_h !\, n_h !}{(n_h - u) !\, (n_h + u) !} \qquad (m = n \mp u)$$

che si può scrivere

$$(3.8)\qquad S_h(\theta) = g(n_h) a'_{n_h} + \sum_{u=1}^{[\theta n_h]} c_{n_h, n_h + u} \{ g(n_h - u) a'_{n_h - u} + g(n_h + u) a'_{n_h + u} \}.$$

4. Studio del termine della « somma di Fabry ».

Essendo $P_{0,h}(z)$ funzione pari di $z - n_h$, per la (3.5) è

$$(4.1)\qquad g(n_h - u) a'_{n_h - u} + g(n_h + u) a'_{n_h + u} =$$

$$= A_h(n_h - u) \cdot P_{0,h}(n_h \mp u) \cdot B_h(n_h + u) \cdot P_{1,h}(n_h + u)(B'_h a'_{n_h - u} + A'_h P'_h a'_{n_h + u})$$

dove

$$(4.2)\qquad A'_h = \frac{A_h(n_h + u)}{A_h(n_h - u)};\; P'_h = \frac{P_{1,h}(n_h + u)}{P_{1,h}(n_h - u)};\; B'_h = \frac{B_h(n_h - u)}{B_h(n_h + u)}.$$

Procediamo alla valutazione di A'_h e B'_h.

Poichè $g(z)$ cambia segno soltanto per $z=\rho$ e i numeri $\rho \in I_h$ sono in numero pari, è evidente, per la definizione in (3.5), che A_h, B_h, $P_{1,h}$, A'_h, B'_h, P'_h sono positivi; P'_h risulta maggiore di uno, e, inoltre, per la posizione degli zeri $\rho \in I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_{h-1}$ e $\rho \in I_{h+1} \cup I_{h+2} \cup \ldots$ si vede che anche

$$A'_h > 1, \; B'_h > 1.$$

Poniamo

$$A'_h = \prod_{l=1}^{h-1} R_l(u), \qquad B'_h = \prod_{l=h+1}^{\infty} S_l(u) \tag{4.3}$$

$$P'_h = \prod_{\rho \in I_h} T_l(u)$$

dove

$$R_l(u) = \prod_{\rho \in I_l} \frac{(n_h+u)^2-\rho^2}{(n_h-u)^2-\rho^2}, \qquad S_l(u) = \prod_{\rho \in I_l} \frac{\rho^2-(n_h-u)^2}{\rho^2-(n_h+u)^2}$$

$$T_l(u) = \frac{n_h+u+\rho}{n_h-u+\rho}.$$

Valutazione di A'_h. Poniamo

$$n_h \mp u = (1+\mu)n_h \qquad (0 \leqq \mu \leqq \theta \leqq 1/6).$$

Con queste posizioni risulta

$$\frac{(n_h+u)^2-\rho^2}{(n_h-u)^2-\rho^2} = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2 \cdot \left\{1-\left(\frac{\rho}{n_h(1+\mu)}\right)^2\right\} \cdot \left\{1-\left(\frac{\rho}{n_h(1-\mu)}\right)^2\right\}^{-1}$$

ed essendo $n_l(1-\theta) \leqq \rho = n_l(1+\sigma) \leqq n_l(1+\theta)$ otteniamo

$$\frac{(n_h+u)^2-\rho^2}{(n_h-u)^2-\rho^2} = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2 \left\{1-\left(\frac{1+\sigma}{1+\mu}\cdot\frac{n_l}{n_h}\right)^2\right\} \cdot \left\{1-\left(\frac{1+\sigma}{1-\mu}\cdot\frac{n_l}{n_h}\right)^2\right\}^{-1}$$

$$= \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2 \left\{1+4\mu\cdot\frac{(1+\sigma)^2}{(1-\mu^2)^2}\left(\frac{n_l}{n_h}\right)^2 + O\left(\mu\left(\frac{n_l}{n_h}\right)^4\right)\right\}$$

ed essendo $0 \leqq \mu \leqq \theta \leqq 1/6$, $-\theta \leqq \sigma \leqq \theta$ si ottiene quando n_l/n_h è abbastanza piccolo

$$\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2 \left\{1+2\mu\left(\frac{n_l}{n_h}\right)^2\right\} < \frac{(n_h+u)^2-\rho^2}{(n_h-u)^2-\rho^2} < \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2 \left\{1+6\mu\left(\frac{n_l}{n_h}\right)^2\right\}$$

$$\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2 \exp\left\{2\mu\left(\frac{n_l}{n_h}\right)^2\right\} < \frac{(n_h+u)^2-\rho^2}{(n_h-u)^2-\rho^2} < \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2 \exp\left\{6\mu\left(\frac{n_l}{n_h}\right)^2\right\}.$$

Per la prima di (4.4) otteniamo

$$\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{4v_l} \exp\left\{2\mu\frac{v_l n_l^2}{n_h^2}\right\} < R_l(u) < \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{4v_l} \exp\left\{12\mu\frac{v_l n_l^2}{n_h^2}\right\}.$$

Poniamo

$$V_h = v_1 + v_2 + \dots + v_h .$$

Allora la limitazione precedente, unita alla prima di (4.3) ci fornisce la valutazione

$$A' = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{4V_{h-1}} \exp\left\{2\tau\mu \sum_{l=1}^{h-2} \frac{v_l n_l^2}{n_h^2}\right\} \tag{4.5}$$

valida con $1 < \tau < 6$ per n_{h-1}/n_h abbastanza piccolo.

Valutazione di B'_h. Osserviamo che è

$$\frac{\rho^2-(n_h-u)^2}{\rho^2-(n_h+u)^2} = \left\{1-\left(\frac{n_h(1-\mu)}{\rho}\right)^2\right\}\cdot\left\{1-\left(\frac{n_h(1+\mu)}{\rho}\right)^2\right\}^{-1}$$

ed essendo $\rho \geqq (1-\theta)n_l$ risulta, con procedimento analogo a quello seguito per $R_l(u)$:

$$\frac{\rho^2-(n_h-u)^2}{\rho^2-(n_h+u)^2} \leqq 1+6\mu\left(\frac{n_h}{n_l}\right)^2 < \exp\left\{6\mu\left(\frac{n_h}{n_l}\right)^2\right\}.$$

Ne segue

$$1 \leqq S_l(u) \leqq \exp\left\{12\mu\frac{v_l n_h^2}{n_l^2}\right\},$$

$$1 \leqq B'_h \leqq \exp\left\{12\mu \sum_{l=h+1}^{\infty} \frac{v_l n_h^2}{n_l^2}\right\} \tag{4.6}$$

(per n_h/n_{h+1} abbastanza piccolo).

Valutazione di P'_h. Ponendo

$$\rho' = n - u_t^* - 1/2, \qquad \rho'' = n + u_t^* + 1/2$$

è

$$\rho' + \rho'' = 2n, \qquad \rho'\cdot\rho'' = n^2 - (u_t^* + 1/2)$$

e quindi anche

$$\frac{P_{1,h}(n_h+u)}{P_{1,h}(n_h-u)} = \prod_t \frac{\rho'+n_h+u}{\rho'+n_h-u}\cdot\frac{\rho''+n_h+u}{\rho''+n_h-u}$$

$$= \prod_t \frac{(2n_h+u)^2-(u_t^*+1/2)^2}{(2n_h-u)^2-(u_t^*+1/2)^2}$$

$$= \prod_t \frac{(1+\mu/2)^2-(u_t^*+1/2)^2/(2n_h)^2}{(1-\mu/2)^2-(u_t^*+1/2)^2/(2n_h)^2}.$$

Poichè ogni fattore di questo prodotto ha il numeratore che supera il denominatore ed è $0 \leqq u_t^* \leqq [\theta n_h]$, $(0 < \theta \leqq 1/6)$, si riconosce immediatamente che ogni fattore è compreso fra i due seguenti numeri (indipendenti da t), ottenuti ponendo il minimo e il massimo possibile per il sottraendo nei due termini:

$$1 + 2\mu, \qquad 1 + 3\mu$$

e quindi

$$e^{\mu}, \qquad e^{3\mu}.$$

Si conclude

$$\exp(\mu v_h) < P'_h < \exp(3\mu v_h). \tag{4.7}$$

Diradamento della successione $\{n_h\}$.

Poichè $v_h/n_h \to 0$ è possibile passare a una successione parziale di $\{n_h\}$ per la quale: 1°) v_h/n_h è monotona non crescente

$$v_{h+1}/n_{h+1} \leqq v_h/n_h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

2°

$$n_{h+1} \geqq n_h^4.$$

Osserviamo che:

$$\sum_{l=h+1}^{\infty} \frac{v_l n_h^2}{n_l^2} \leqq \frac{v_{h+1}}{n_{h+1}} \cdot \sum_{l=h+1}^{\infty} \frac{v_l}{n_l} \cdot \frac{n_{h+1}}{v_{h+1}} \cdot \frac{n_h^2}{n_l}$$

$$\leqq \frac{v_{h+1}}{n_{h+1}} \cdot n_h^2 \cdot \sum_{l=h+1}^{\infty} \frac{1}{n_l}$$

$$\leqq \frac{v_{h+1}}{n_{h+1}} n_h^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{n_h^{4l}}$$

$$\leqq \frac{1}{6} \frac{1}{n_h^2} \quad \text{per } h \text{ abbastanza grande,}$$

quindi anche (essendo $1 < \tau < 6$)

$$\exp\left\{ 12\mu \sum_{l=h+1}^{\infty} \frac{v_l n_h^2}{n_l^2} \right\} < \exp\left\{ 2\tau\mu \sum_{l=1}^{h-1} \frac{v_l n_l^2}{n_h^2} \right\}. \tag{4.8}$$

Fissato $\varepsilon > 0$ si tolgano in $\{n_h\}$ alcuni elementi all'inizio in guisa da avere

$$12 \sum_{l=1}^{h-1} \frac{v_l n_l^2}{n_h^2} < \varepsilon$$

allora le (4.5), (4.6) e (4.8) ci danno

$$A_h' = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{4V_{h-1}} \exp(\theta'\mu\varepsilon) \qquad (0 < \theta' < 1)$$

$$1 \leqq B_h' \leqq \exp(\theta'\varepsilon)$$

e, tenendo conto della (4.7) otteniamo la seguente catena di disuguaglianze

$$1 \leqq B_h' < B_h' \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{4V_{h-1}} \cdot P_h' \leqq \tag{4.9}$$

$$\leqq A_h' P_h' < \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{4V_{h-1}} \exp\{(3v_h + \varepsilon)\mu\}.$$

Diradiamo ancora eventualmente la successione $\{n_h\}$ in guisa da avere $V_{h-1}/\psi(n_h) \to 0$; con questo risulta

$$\frac{1+\mu}{1-\mu} = 1 + \frac{2\mu}{1-\mu} < \exp(3\mu)$$

$$\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{4V_{h-1}} < \exp(12\mu V_{h-1}) < \exp\{\mu(\psi(n_h) - \varepsilon)\}$$

e quindi anche, per la (4.9) ($\mu = u/n_h$)

$$1 \leqq B_h' < A_h' P_h' < \exp\{u(v_h + \psi(n_h))/n_h\}. \tag{4.10}$$

Tenendo conto dell'ipotesi (B^*), la (4.10) ci mostra che l'espressione

$$B_h'(a'_{n_h-u} + (A_h' P_h'/B_h')a'_{n_h+u})$$

ha il segno comune alle due espressioni

$$a'_{n_h-u} + a'_{n_h+u} \quad \text{e} \quad a'_{n_h-u} + a'_{n_h+u} \exp\{u(v_h + \psi(n_h))/n_h\}$$

e per la scelta degli zeri ρ del polinomio $P_h(z)$, il primo membro di (4.1) ha segno indipendente da u. Dunque tutti i termini della somma $S_h(\theta)$ definita in (3.8) hanno lo stesso segno.

Valutazione al disotto della somma $S_h(\theta)$.

Per la posizione (A) e per la proprietà (ii) di $g(n_h)$ (vedi n° 3) il primo termine di $S_h(\theta)$ ha la proprietà

$$\underline{\lim} \, | g(n_h) a'_{n_h} |^{1/n_h} \geqq 1$$

e, avendo i temini di $S_h(\theta)$ tutti lo stesso segno, risulta

$$\overline{\lim} \, | S_h(\theta) |^{1/n_h} \geqq \underline{\lim} \, | S_h(\theta) |^{1/n_h} \geqq 1$$

e il punto $z = 1$ risulta singolare.