Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alessandro Terracini

# Un'osservazione su un passo di un lavoro giovanile di Corrado Segre.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **12** (1957), n.4, p. 673–677.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1957_3_12_4_673_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1957.

# SEZIONE STORICO-DIDATTICA

## Un'osservazione su un passo di un lavoro giovanile di Corrado Segre.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino)

**Sunto.** - *Si rettifica un'affermazione contenuta in un lavoro giovanile di* CORRADO SEGRE, *concernente alcuni complessi quadratici.*

**Summary.** - *A statement contained in an early paper of* CORRADO SEGRE *- dealing with some quadratic complexes - is emended.*

**1.** In tutta la sua produzione scientifica, CORRADO SEGRE procedette costantemente con la massima cura e scrupolosità, cosicchè le affermazioni inesatte contenute nei suoi lavori sono in numero limitatissimo: per i lavori riprodotti nel vol. I delle sue Opere, pubblicate a cura dell'Unione matematica italiana, si veda per esempio quanto poche sono le inesattezze segnalate dai revisori.

Perciò, analizzare un passo del Maestro dove si trova qualche cosa di meno corretto, oltre che risolversi in un omaggio — quale vuol essere il presente — alla Sua memoria, implica anche la segnalazione di un fatto infrequente.

Mi è dunque parso che valga forse la pena — sebbene si tratti di argomenti molto elementari — di soffermarsi un momento ad esaminare una proposizione che compare nel n. 7 della Memoria (datata ottobre 1883, ma in preparazione — come sappiamo dallo stesso C. SEGRE — fin dall'anno accademico 1881-82 ([1])): *Su una trasformazione irrazionale dello spazio e sua applicazione allo studio del complesso quadratico di Battaglini e di un complesso lineare*

([1]) Nel quale anno C. SEGRE ne fece oggetto di alcune conferenze alla « Scuola di Magistero » dell' Università di Torino.

*di coniche iscritte in un tetraedro* (Giorn. di matematiche, t. 21, 1883, pp. 355-378).

La trasformazione studiata da CORRADO SEGRE è quella che viene posta tra due spazi tridimensionali $S$, $S'$ dalle

$$x_i' = x_i^2, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

nella quale un punto generico $x'$ dello spazio $S'$ proviene ovviamente da otto punti dello spazio $S$, ottenuti da uno di essi mediante un gruppo $G_8$ di omografie di $S$ in sè contenente — oltre all'identità — :

*a*) le quattro omologie armoniche ciascuna delle quali ha come centro un vertice del tetraedro $T$ di riferimento, e come piano di omologia la faccia opposta;

*b*) le tre omografie biassiali armoniche aventi come assi due spigoli opposti del medesimo tetraedro.

Orbene, CORRADO SEGRE — che chiama « *simmetrica rispetto al tetraedro T* » una figura dello spazio $S$ quando essa è invariante rispetto al $G_8$ — nel n. 7 enuncia il teorema che segue, e che qui riproduco testualmente, con la sola variante di includere tra virgolette alcune parti dell'enunciato originale:

*I soli complessi quadratici i quali siano simmetrici rispetto ad un tetraedro, sono quelli le cui equazioni riferite a questo tetraedro « o » contengono unicamente i quadrati delle coordinate, cioè* i complessi di BATTAGLINI, *ovvero « contengono unicamente i prodotti delle coordinate complementari, cioè »* i complessi tetraedrali.

Non sussiste dubbio alcuno sul significato letterale di questo enunciato: secondo esso, i soli complessi quadratici « simmetrici » rispetto al tetraedro $T$ sarebbero i complessi di BATTAGLINI.

$$\Sigma\, c_{ik} p^2_{ik} = 0, \tag{1}$$

e i complessi tetraedrali

$$a p_{12} p_{34} + b p_{13} p_{42} + c p_{14} p_{23} = 0. \tag{2}$$

Ora p. e. il complesso

$$A p_{12} p_{13} + B p_{34} p_{42} = 0 \tag{3}$$

con $A$, $B$ costanti arbitrarie, non rientra in nessuno dei tipi (1), (2), pur essendo esso invariante rispetto al $G_8$. Si tenga invero presente, qui e nel seguito, che — come rileva lo stesso SEGRE — delle sette omografie non identiche del $G_8$, le quattro omologie *a*) operano sulle coordinate di retta mutando nelle opposte tre coordinate con un indice comune, mentre le tre omografie biassiali *b*) mutano nelle opposte due coordinate con indici complementari, mentre in ogni caso le rimanenti $p_{ik}$ rimangono inalterate.

Quindi l'enunciato di CORRADO SEGRE, così come sta, è da ritenersi inesatto ([2]). Esso però diventa corretto, se si sopprimono le parti tra virgolette. Invero, come è facile verificare, e come espongo nel seguito, la sola eccezione all'enunciato di SEGRE è proprio costituita — a meno di permutazioni sugli indici — dai complessi (3); e d'altra parte questi, pur non rientrando nell'enunciato originale di CORRADO SEGRE, sono effettivamente complessi tetraedrali, ma rispetto a un altro tetraedro, diverso da $T$.

**2.** Allo scopo di verificare quanto si è detto, partiamo da un complesso quadratico $C$ supposto invariante rispetto al $G_8$, e — nel primo membro della sua equazione — chiamiamo rispettivamente $\Phi$ e $\Psi$ l'insieme dei termini che sono pari, o rispettivamente dispari, rispetto a una determinata coppia di coordinate con indici complementari, p. e. $p_{12}$, $p_{34}$. Allora le rette di $C$, soddisfacendo a entrambe le equazioni $\Phi + \Psi = 0$, $\Phi - \Psi = 0$ soddisfano altresì alla $\Psi = 0$. Distinguiamo due casi, secondochè:

1) la $\Psi = 0$ si riduce a un'identità qualunque sia la coppia di indici complementari che si considera; oppure

2) — con riferimento a una determinata coppia di indici complementari, che supponiamo sia p. e. la 12,34 — la $\Psi = 0$ è soddisfatta unicamente dalle rette del complesso $C$, e si può pertanto riguardare come una delle forme nelle quali si può scrivere l'equazione di quel complesso quadratico.

([2]) Non mi consta che questa inesattezza sia stata rilevata da C. SEGRE, il quale pure è tornato successivamente più volte sui complessi quadratici, e in particolare (ancora nel 1916) su quello di BATTAGLINI, né da altri. Che l'enunciato di C. SEGRE non sia corretto, non è rilevato nemmeno nell'art. III C 8 di ZINDLER nell'*Enc. der math. Wissenschaften*, dove nella nota ([1090]) il teorema di C. SEGRE è riportato nella forma abbreviata: « Die einzigen quadratischen Komplexe die bezüglich eines Tetraeders diese Art von Symmetrie aufweisen, sind die Battaglinischen und die tetraedralen », nella quale la parte inesatta è automaticamente eliminata.

**3.** Nel caso 1), il primo membro dell'equazione di $C$ è dunque pari rispetto a ciascuna coppia di indici complementari; cosicché l'equazione stessa è necessariamente della forma

$$\Sigma\, c_{ik} p^2_{ik} + a p_{12} p_{34} + b p_{13} p_{42} + c p_{14} p_{23} = 0. \tag{4}$$

Se ora si impone che $C$ sia invariante per il $G_8$ (e non soltanto per il sottogruppo $G_4$ formato dalle sue omografie biassiali armoniche, insieme con l'identità, come avviene per ogni complesso (4)), operando con una qualsiasi delle omologie di tipo $a$), ne segue che le rette di $C$ soddisfano anche all'equazione

$$\Sigma\, c_{ik} p^2_{ik} - a p_{12} p_{34} - b p_{13} p_{42} - c p_{14} p_{23},$$

e quindi (per differenza) alla

$$a p_{12} p_{34} + b p_{13} p_{42} + c p_{14} p_{23} = 0. \tag{5}$$

Conviene distinguere ulteriormente due sottocasi:

$1_1$) la (5) è un'identità: allora $a = b = c$; la (4) si riduce alla (1), e siamo in una delle alternative previste dall'enunciato di Corrado Segre;

$1_2$) la (5) non è identica, cioè è una delle possibili forme dell'equazione di $C$. Allora la (4) si riduce alla (2), e siamo nella seconda alternativa prevista da Segre.

**4.** Fin qui tutto procede secondo la lettera dell'enunciato di Corrado Segre. Ma le cose cambiano se studiamo il caso 2). L'equazione di $C$ sarà allora della forma

$$p_{12}(A_1 p_{13} + B_1 p_{42} + C_1 p_{14} + D_1 p_{23}) + p_{34}(A_2 p_{13} + B_2 p_{42} + C_2 p_{14} + D_2 p_{23}) = 0,$$

nella quale, per fissare le idee, supponiamo che compaia effettivamente qualcuna fra le coordinate $p_{13}$, $p_{42}$. Perciò, scrivendo che le rette di $C$ soddisfanno anche all'equazione che si deduce da quella testé scritta mediante il cambiamento di $p_{14}$, $p_{23}$ rispettivamente in $-p_{14}$, $-p_{23}$, segue che si può supporre $C_1 = D_1 = C_2 = D_2 = 0$. Finalmente, se nell'equazione

$$p_{12}(A_1 p_{13} + B_1 p_{42}) + p_{34}(A_2 p_{13} + B_2 p_{42}) = 0$$

mutiamo nelle opposte le coordinate per le quali uno degli indici è 4, deduciamo che o è $B_1 = A_2 = 0$, oppure $A_1 = B_2 = 0$; cosicché l'equazione del complesso si riduce all'una o all'altra delle

$$A_1 p_{12} p_{13} + B_2 p_{34} p_{42} = 0,$$

$$B_1 p_{12} p_{42} + A_2 p_{34} p_{13} = 0;$$

cioè appunto — salvo le notazioni, ed un'eventuale permutazione di indici — alla (3).

Verificato così che l'unica eccezione all'enunciato di CORRADO SEGRE è sostanzialmente costituita dal complesso quadratico (3), resta solo da stabilire che anche il complesso quadratico (3) è tetraedrale, sebbene rispetto ad un tetraedro diverso da $T$. E ciò si fa subito mediante il cambiamento di coordinate (lecito, se prescindiamo dall'eventualità che $C$ si spezzi in una coppia di complessi lineari):

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{1}{2\sqrt{A}}(y_1 + y_4) : y_2 : y_3 : \frac{1}{2\sqrt{B}}(y_1 - y_4), \tag{6}$$

che, designando con $\overset{*}{p}_{ik}$ le nuove coordinate di retta, riduce l'equazione di $C$ alla forma

$$\overset{*}{p}_{12}\overset{*}{p}_{34} - \overset{*}{p}_{13}\overset{*}{p}_{42} = 0. \tag{7}$$

Il complesso $C$ è dunque ancora tetraedrale, ma rispetto ad un nuovo tetraedro (avente due vertici comuni con $T$, e i due rimanenti sullo spigolo opposto di $T$, coniugati armonici rispetto ai due vertici di $T$ esistenti sullo spigolo stesso). Anzi, esso è costituito dalle rette che segnano in coppie armoniche le quattro faccie del nuovo tetraedro (precisamente, le due che esso ha in comune con $T$, e le due rimanenti). E anzi, per questa stessa ragione, nel caso «eccezionale» $C$ è contemporaneamente anche un complesso di BATTAGLINI, ma ancora rispetto ad un altro tetraedro.

**5.** Se poi si cerca perché CORRADO SEGRE sia giunto ad un risultato inesatto, la risposta si trova nel breve ragionamento che, nello stesso n. 7 del lavoro citato, costituisce sostanzialmente la dimostrazione: ragionamento piuttosto conciso, e mi permetterei di dire alquanto confuso, nel quale comunque sembra implicitamente ammesso che uno dei tetraedri rispetto ai quali l'equazione di un complesso quadratico assume la forma canonica (4) deva coincidere col tetraedro $T$ che definisce il $G_8$ rispetto al quale i complessi quadratici cercati devono essere invarianti, mentre l'equazione (3) mostra che ciò può anche non avvenire.