Cesare Rimini

# Un metodo per il calcolo approssimato di radici quadrate.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **13** (1958), n.1, p. 34–37.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_1_34_0>

# Un metodo per il calcolo approssimato di radici quadrate.

Nota di CESARE RIMINI (a Bologna)

**Sunto.** - *Si dà una formola generale per la costruzione di successioni rapidamente convergenti alla radice quadrata di un numero.*

**Summary.** - *A general formula is obtained for the construction of successions rapidly convergent to the square root of a given number.*

Recentemente, in alcune sue apprezzatissime conferenze tenute all' Osservatorio Astrofisico di Arcetri ed all' Istituto Matematico dell' Università di Bologna su questioni riguardanti la propagazione ionosferica, il Prof. V. A. BAILEY della Università di Sydney ha fatto uso di una formola ricorrente atta al calcolo numerico rapido di radici quadrate, riservandosi di pubblicarne prossimamente una dimostrazione.

Di tale formola, nonchè di alcune sue notevoli estensioni, non è difficile dare una giustificazione elementare, ed ecco come.

Se $a$ ed $x$ sono due numeri reali positivi diversi, uno di essi $a$ può considerarsi un valore approssimato dell'altro $x$ e la differenza $x - a$ rappresenta la misura dell'approssimazione, la quale risulta per difetto o per eccesso secondo che è $x > a$ oppure $x < a$.

Ci proponiamo di trovare un numero $a_1$ (anch' esso positivo e diverso da $x$) che approssimi $x$ «meglio» di $a$, e nello stesso senso, cioè tale che la differenza $x - a_1$ abbia lo stesso segno di $x - a$ e valore assoluto $< |x - a|$. A tal fine, detto $k$ un qualunque numero intero positivo, partiamo dalla identità

$$(x - a)^{2k+1} = x^{2k+1} - (2k+1)x^{2k}a + \binom{2k+1}{2} x^{2k-1}a^2 - \dots +$$

$$+ (-1)^k \binom{2k+1}{k} x^{k+1}a^k - (-1)^k \binom{2k+1}{k} x^k a^{k+1} + \dots -$$

$$- \binom{2k+1}{2} x^2 a^{2k-1} + (2k+1)xa^{2k} - a^{2k+1},$$

che, ponendo

$$P_k(a,\ x) = x^{2k} + \binom{2k+1}{2} x^{2k-2}a^2 + \dots + (2k+1)a^{2k},$$

può scriversi

$$\frac{(x-a)^{2k+1}}{P_k(a,\ x)} = x - a\,\frac{P_k(x,\ a)}{P_k(a,\ x)}\,. \tag{1}$$

Orbene, è facile vedere che il numero

$$a_1 = a\,\frac{P_k(x,\ a)}{P_k(a,\ x)} \tag{2}$$

soddisfa alle condizioni poste. Invero, poichè, per essere $a > 0$, $x > 0$, è ovviamente $P_k(a,\ x) > 0$, si ha, in primo luogo, che il segno di $x - a_1$ è concorde con quello di $x - a$. In secondo luogo, osservando che i polinomi $P_k(a,\ x)$, $P_k(x,\ a)$, ordinati per le potenze decrescenti di $x$ (o di $a$), presentano gli stessi coefficienti, ma in ordine invertito, si ha tosto che la differenza $P_k(a,\ x) - P_k(x,\ a)$ ha lo stesso segno di $a - x$ e pertanto la frazione che moltiplica $a$ al secondo membro della (2) risulta $> 1$ per ogni $a < x$, e $< 1$ per ogni $a > x$. Quindi il numero $a_1$ approssima $x$ meglio di $a$, e, come sopra osservato, nello stesso senso. E si ha anche che l'unico numero positivo $a$ soddisfacente alla equazione $P_k(a,\ x) = P_k(x,\ a)$ è precisamente $x$.

Le effettive espressioni dei polinomi $P_k$ sono, per i primi valori di $k$, le seguenti:

$$\begin{aligned}
k = 1 \quad &: \quad P_1(a,\ x) = x^2 + 3a^2 \\
k = 2 \quad &: \quad P_2(a,\ x) = x^4 + 10a^2x^2 + 5a^4 \\
k = 3 \quad &: \quad P_3(a,\ x) = x^6 + 21a^2x^4 + 35a^4x^2 + 7a^6 \\
k = 4 \quad &: \quad P_4(a,\ x) = x^8 + 36a^2x^6 + 126a^4x^4 + 84a^6x^1 + 9a^8 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot &
\end{aligned}$$

Per ogni fissato $k$, la (2) permette di costruire, a partire da un *arbitrario* numero positivo $a_0$, una successione $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots$ tendente ad $x$. Tale è precisamente quella definita dalla relazione ricorrente

$$a_{n+1} = a_n\,\frac{P_k(x,\ a_n)}{P_k(a_n,\ x)}\,. \tag{3}$$

Che effettivamente tale successione abbia $x$ per limite, risulta facilmente dalle precedenti osservazioni. Invero, da esse si rileva dapprima che tale successione è in ogni caso monotona, e precisamente crescente o decrescente secondo che il suo primo elemento $a_0$ è $< x$ o $> x$; inoltre essa è limitata superiormente nel primo caso, inferiormente nel secondo (risultando ogni $a_n < x$, risp. $> x$), onde in entrambi i casi esiste finito $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l \neq 0$.

Per calcolare tale $l$, basta far tendere $n$ all'infinito nella precedente; si ottiene così la relazione $l = l\,\dfrac{P_k(x,\ l)}{P_k(l,\ x)}$ che, per quanto sopra notato, non ha altra soluzione reale positiva che la $l = x$.

Le successioni considerate rappresentano un vantaggioso strumento per approssimare rapidamente un qualunque numero positivo $x$, partendo da un arbitrario numero positivo $a_0$, inquantochè la differenza fra l'elemento generale della (3) ed $x$ è dell'ordine della potenza $(2k+1)^{ma}$ di quella relativa all'elemento precedente. Si ha infatti dalla (1):

$$x - a_{n+1} = \frac{(x - a_n)^{2k+1}}{P_k(a_n,\ x)}\,, \tag{4}$$

e, poichè $P_k(a_n,\ x)$ è ovviamente compreso fra $(2a_n)^{2k}$ e $(2x)^{2k}$ (in quanto la somma dei coefficienti del polinomio $P_k$ vale, come è ben noto, $2^{2k}$), si può precisare che il valore assoluto $\varepsilon_{n+1}$ dell'errore di cui è affetta la valutazione $a_{n+1}$ di $x$ è compreso fra $\dfrac{\varepsilon_n^{\,2k+1}}{(2a_n)^{2k}}$ e $\dfrac{\varepsilon_n^{\,2k+1}}{(2x)^{2k}}$.

Il procedimento descritto può teoricamente applicarsi alla valutazione di qualunque numero (incognito) $x$, ma dal punto di vista pratico esso non presenta interesse alcuno in quanto, nell'espressione che costituisce il secondo membro di (3), e che dovrebbe usarsi per calcolare $a_{n+1}$ mediante $a_n$, entra proprio il numero incognito stesso. Però, se si osserva che questo figura soltanto pel tramite delle sue potenze ad esponente pari, si conclude che il procedimento stesso può essere vantaggiosamente applicato nel caso in cui il cercato numero $x$ sia la radice quadrata (aritmetica) di un dato numero reale positivo $A$, cioè sia $x^2 = A$.

Possiamo dunque affermare che, partendo da un qualunque numero $a_0 > 0$, le successioni definite da

$$a_{n+1} = a_n\,\frac{3A + a_n^2}{A + 3a_n^2}\,, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{5}$$

oppure da

$$a_{n+1} = a_n\,\frac{5A^2 + 10a_n^2A + a_n^4}{A^2 + 10a_n^2A + 5a_n^4}\,, \qquad \text{»} \tag{6}$$

oppure da

$$a_{n+1} = a_n\,\frac{7A^3 + 35a_n^2A^2 + 21a_n^4A + a_n^6}{A^3 + 21a_n^2A^2 + 35a_n^4A + 7a_n^6}\,, \qquad \text{»} \tag{7}$$

ecc., hanno, per $n \to \infty$, per limite $\sqrt{A}$, precisandosi inoltre che ogni loro elemento ha, rispetto a $\sqrt{A}$, una differenza che è dell'ordine della 3ª, risp. 5ª, risp. 7ª, ..., potenza della analoga differenza relativa all'elemento precedente.

Ad es., per $A = 10$, $a_0 = 3$, la (5) fornisce per $\sqrt{10}$ un primo valore

$$a_1 = 3 \cdot \frac{500 + 900 + 81}{100 + 900 + 405} = 3,\ 16227758\ldots,$$

che approssima (per difetto) $\sqrt{10}$ a non meno di $\dfrac{0{,}17^5}{6^4} \cong 10^{-8}$.

Per approssimare $\sqrt{A}$ si può anche utilizzare un'altra successione, precisamente quella costituita dai numeri $a_1$ definiti dai secondi membri delle (5), (6), (7), ... scritte per $n = 0$ e relative ai valori 1, 2, 3, ... di $k$ (e che, per chiarezza, converrà indicare con $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$), a condizione, naturalmente, che tal successione effettivamente converga a $\sqrt{A}$. Ora tale condizione è certamente soddisfatta se $a_0$ è compreso fra $\dfrac{\sqrt{A}}{3}$ e $3\sqrt{A}$. Per convincersene, basta osservare che, in virtù della (4), è

$$\sqrt{A} - b_k = \frac{(\sqrt{A} - a_0)^{2k+1}}{P_k(a_0, \sqrt{A})},$$

e che il valore assoluto del secondo membro è, come già osservammo, compreso fra

$$|\sqrt{A} - a_0| \left| \frac{\sqrt{A} - a_0}{2a_0} \right|^{2k} \quad \text{e} \quad |\sqrt{A} - a_0| \left| \frac{\sqrt{A} - a_0}{2\sqrt{A}} \right|^{2k}.$$

Ora, se è $a_0 < \sqrt{A}$, e quindi $|\sqrt{A} - a_0| = \sqrt{A} - a_0$, fra questi due numeri il maggiore è il primo, e questo, per $a_0 > \dfrac{\sqrt{A}}{3}$, tende a zero per $k \to \infty$; se invece è $a_0 > \sqrt{A}$, e quindi $|\sqrt{A} - a_0| = a_0 - \sqrt{A}$, il maggiore è il secondo, ed il suo $\lim\limits_{k \to \infty}$ è nullo per $a_0 - \sqrt{A} < 2\sqrt{A}$, cioè $a_0 < 3\sqrt{A}$.

Così, per calcolare $\sqrt{2}$, si potrebbe, partendo da $a_0 = 2$, utilizzare la successione i cui primi elementi sono

$$2 \cdot \frac{10}{14} = \frac{10}{7},\quad 2\,\frac{20 + 80 + 16}{4 + 80 + 80} = \frac{58}{41},\quad 2\,\frac{56 + 560 + 672 + 64}{8 + 336 + 1120 + 448} = \frac{338}{239}, \ldots$$

il terzo dei quali approssima (per eccesso) $\sqrt{2}$ a meno di $10^{-5}$.