Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

Su di una congettura di Sierpiński relativa alla possibilità in numeri naturali della $5/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.1, p. 65–72.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_1_65_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Su di una congettura di Sierpiński relativa alla possibilità in numeri naturali della $5/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce)

Sunto. - *È contenuto nella breve introduzione che segue.*

Summary. - *It is contained in the following introduction.*

W. SIERPIŃSKI (¹) ha congetturato che la

$$\frac{5}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \tag{1}$$

è possibile in numeri naturali (in questo Lavoro ci occupiamo soltanto di soluzioni in numeri naturali anche se ciò non è detto ogni volta esplicitamente) qualunque sia l'intero e positivo $n > 1$ ed ha verificato tale sua congettura per tutti i numeri naturali ≤ 1000.

Ora noi dimostriamo quì che la (1) è possibile per ogni intero e positivo che non è della forma $1260m + 1$ (da questo teorema seguono senza altro i risultati di SIERPIŃSKI relativi ad $n \leq 1000$) e proveremo per gli n di questa forma che la (1) è possibile in numeri naturali per

$$n \leq 922\ 321.$$

§ 1° - La (1) è possibile se n non ha la forma $1260m + 1$.

Da un noto teorema (²) secondo cui *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la*

$$\frac{a}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \tag{2}$$

sia possibile in numeri naturali è che, se sono degli interi e positivi le due ultime espressioni seguenti

$$n + k, \quad \frac{na(n + k) + A}{k}, \quad \frac{na(n + k) + B}{k}, \tag{3}$$

(¹) W. SIERPIŃSKI, *Sur les décompositions de nombres rationnels en fractions primaires*, « Mathesis », LXV, (1956) pp. 16-32.

(²) G. MIGNOSI, *Sulla equazione dell' Ottica*, « Rendiconti Seminario Facoltà Sc. Università di Cagliari », (1931), Fasc. IV.

come è sempre possibile con la scelta opportuna di k, A *e* B, *siano, tali interi, divisibili per* a, *essendo* k *un intero dell'intervallo* 1, 2n *ed* A *e* B *fattori complementari positivi di* $n^2a^2(n+k)^2$, *cioè* k, A *e* B *essendo tali che si abbia*

$$1 \leq k \leq 2n, \qquad AB = n^2a^2(n+k)^2.$$

Quando la detta condizione è soddisfatta i quozienti delle divisioni delle espressioni (3) per a dànno una soluzione di (2).

Nel caso nostro, essendo $a = 5$, si ha che le soluzioni della (1) sono date da

$$x_1 = \frac{n+k}{5}, \qquad x_2 = \frac{5n(n+k)+A}{5k}, \qquad x_3 = \frac{5n(n+k)+B}{5k},$$

con

$$1 \leq k \leq 2n, \qquad AB = 5^2 x_1^2 n^2,$$

quando x_i siano interi; cioè, se facciamo

$$A = 5A', \qquad B = 5B', \qquad \text{con} \quad A'B' = x_1^2 n^2,$$

da

$$(4) \qquad x_1 = \frac{n+k}{5}, \qquad x_2 = \frac{nx_1 + A'}{k}, \qquad x_3 = \frac{nx_1 + B'}{k}.$$

se x_i sono interi.

2. Si vede subito che, se n ha una delle forme

$$6n', \qquad 6n' \pm 2, \qquad 6n' - 3,$$

la (1) è possibile perchè si ha

$$5/n = 1/n + 2/n + 2/n = 1/n + 1/n + 3/n.$$

Quindi si devono considerare i casi in cui n ha una delle due fòrme $6n' \mp 1$.

3. - 1°. Sia $n = 6n' - 1$, $n' \geq 1$.

Possono darsi i seguenti casi:

$$n' = 5q + r, \qquad r = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Soluzioni intere positive della (1) si hanno:

a) se $n' = 5q$, per $k = 1$, qualunque siano A', B' con $A'B' = 36q^2(30q-1)^2$;

b) se $n' = 5q + 1$, essendo $n = 30q + 5$, per $k = 5$, con $A' = 5(6q + 2)^2$, $B' = 5(6q + 1)^2$;

c) se $n' = 5q + 2$, essendo $n = 30q + 11$, per $k = 4$, con $A' = 3(2q + 1)^2$, $B' = 3(30q + 11)^2$;

d) se $n' = 5q + 3$, avendosi $n = 30q + 17$, per $k = 3$, $A' = 2^2(3q + 2)^2$, $B' = (30q + 17)^2$;

e) se $n' = 5q + 4$, essendo $n = 30q + 23$, per $k = 2$, $A' = B' = (6q + 5)(30q + 23)$.

Pertanto la (1) se $n = 6n' - 1$, $n' \geq 1$, è sempre possibile in numeri naturali qualunque sia n'.

4. - 2°. Sia $n = 6n' + 1$, $n' \geq 1$,

In modo analogo si dimostra agevolmente in questo secondo caso che la (1) è possibile in interi positivi per $n' = 5q + r$, $r = 1, 2, 3, 4$. Quindi per la verità della congettura di Sierpiński, occorre provare che la (1) è possibile in numeri naturali per $n = 6n' + 1$, essendo $n' = 5q$, cioè per $n = 30q + 1$.

5. Se in $n = 30q + 1$, q è dispari, si prova subito che la (1) è possibile, perchè basta assumere nelle (4) $k = 4$ ed $A' = 6q + 1$, $B' = (6q + 1)(30q + 1)^2$.

Pertanto ci si è ridotti a provare che la (1) è possibile per $n = 60q' + 1$.

6. Nella $n = 60q' + 1$ i valori possibili di q' sono

$$q' = 7l + s, \quad s = 0, 1, \dots, 6.$$

Se notiamo che, essendo $n = 60q' + 1$, x_1 è intero per $k = 5h + 4$ e quindi che le (4) diventano

$$(4') \qquad x_1 = 12q' + h + 1, \qquad x_2 = \frac{(60q' + 1)(12q' + h + 1) + A'}{5h + 4}$$
$$x_3 = \frac{(60q' + 1)(12q' + h + 1) + B'}{5h + 4}$$

si prova subito che la (1) è possibile per $s = 1, \dots, 6$. Difatti:

a) se $q' = 7l + 1$, basta assumere nelle (4') $h = 2$, per avere

$$x_1 = 3(28l + 5), \qquad A'B' = 3^2(28l + 5)^2(420l + 61)^2,$$

ed allora valori interi di x_2 e x_3 si hanno ad esempio per

$$A' = 9, \qquad B' = (28l + 5)^2(420l + 61)^2.$$

In modo analogo soluzioni intere e positive della (1) si hanno:

b) se $q' = 7l + 2$, per $h = 2$, $A' = 9$;
c) se $q' = 7l + 3$, con $h = 2$, $A' = 3(28l + 13)$;
d) se $q' = 7l + 4$, con $h = 0$, $A' = 7$;
e) se $q' = 7l + 5$, con $h = 0$, $A' = 7$;
f) se $q' = 7l + 6$, con $h = 2$, $A' = 1$.

Pertanto la congettura di Sierpiński è vera se si prova che la (1) è possibile per

$$n = 60.7l + 1 = 420l + 1.$$

7. Nella $n = 420\ l + 1$, l può avere una delle tre forme

$$l = 3l',\ 3l' + 1,\ 3l' + 2.$$

Si dimostra subito con un procedimento analogo a quello seguito innanzi che per $n = 420l + 1$, se $l = 3l' + 1$, $l = 3l' + 2$, la (1) è possibile, quindi rimane da provare per dimostrare la verità della congettura di Sierpiński che la (1) è possibile per $n = 420.3l' + 1$, cioè per

$$n = 1260l' + 1.$$

Si è dimostrato così il seguente

Teorema 1°. - La

$$5/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$$

è possibile in numeri naturali per ogni $\mathrm{n} \neq 1260\,\mathrm{m} + 1$.

§ 2°. - La (1) è possibile se in $n = 1260m + 1$, è $m \leq 732$.

1. Con il procedimento seguito nel § precedente si trova che la

$$5/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 \tag{1}$$

in cui n è della forma $1260\ l' + 1$ è possibile in numeri naturali per le seguenti forme lineari di l'. Accanto ad ognuna di tali forme si è indicato nella Tabella che segue il valore di k e di A' con cui si ha soluzione della (1): il corrispondente valore di B' è il fattore coniugato e positivo di A' in $n^2x_1^2$

l'	k	A'	l'	k	A'
$5l''+1$	14	5^2	$31l''+23$	4	31
$5l''+4$	9	5^2	$38l''+27$	19	$2^6(19.63l''+851)$
$11l''+1$	4	11	$41l''+15$	9	41^2
$11l''+2$	9	$(126l''+23)^2$	$41l''+20$	14	3.41
$11l''+3$	14	11	$43l''+33$	4	43
$11l''+9$	44	11	$47l''+21$	4	47
$22l''+5$	24	$11^2(504l''+115)$	$47l''+22$	9	$2^2.47^2$
$13l''+1$	39	13	$59l''+14$	4	59
$13l''+2$	14	3.13	$59l''+22$	9	59^2
$13l''+10$	9	13^2	$61l''+15$	9	$(126l''+31)^2$
$17l''+1$	14	$3^2.17^2$	$61l''+32$	9	$2^2.61^2$
$17l''+8$	34	17	$67l''+21$	4	67
$17l''+12$	9	2.17	$71l''+4$	4	71
$19l''+2$	19	2^3	$71l''+20$	4	71
$19l''+3$	19	19	$79l''+21$	4	79
$19l''+7$	14	19^2	$83l''+11$	4	83
$19l''+9$	19	$2^3(19.63l''+568)$	$83l''+55$	4	83
$19l''+14$	19	$2(19.63l''+883)$	$89l''+18$	89	11^2
$19l''+15$	4	19	$89l''+19$	14	89^2
$23l''+1$	4	23	$103l''+30$	4	103
$23l''+2$	9	23^2	$103l''+47$	4	103
$23l''+3$	14	$3^2.23$	$107l''+14$	14	107^2
$23l''+14$	69	23	$113l''+26$	9	113^2
$29l''+20$	9	$2^2.29^2$	$239l''+125$	4	239
$29l''+26$	9	$(126l''+113)^2$	$251l''+50$	4	251
$31l''+7$	14	$(84l''+19)^2$	$277l''+82$	9	2^4
$31l''+15$	9	$2^2.31$	$449l''+160$	9	2.449
$31l''+17$	4	31			

2. Tenendo presenti le forme $5l''+1$; $5l''+4$; $11l''+1, 2, 3, 9$; $13l''+1, 2, 10$ di l' della precedente Tabella si ottengono subito i valori che deve assumere r nella $l' = 5.11.13\, m + r = 715\, m + r$, $(m = 1, 2, \ldots)$, per cui, come si è dimostrato la (1) è possibile e quindi i valori di r per i quali invece non si è ancora provato che la (1) ammette soluzioni in numeri naturali. Si ha così il seguente

TEOREMA 2°. - *Se non è possibile la (1) lo è soltanto per i valori di* $n = 1260\, l' + 1$, *quando* l' *è dato da* $l' = 715\, m + r$, $(m = 1, 2, \ldots)$, *essendo*

$r =$ *5, 7, 8, 17, 18, 22, 30, 32, 33, 37, 38, 43, 48, 50, 52, 55, 60, 63, 65, 70, 72, 73, 77, 82, 83, 85, 87, 95, 98, 103, 107, 110, 115, 117, 120, 125, 128, 137, 138, 142, 143, 147, 148, 150, 160, 162, 165, 172, 173, 175, 180, 182, 187, 193, 195, 198, 202, 203, 208, 215, 217, 220, 225, 227. 228, 230, 237, 238, 242, 247, 250, 252, 253, 258, 260, 263, 268, 273, 280, 282, 285, 290, 292, 293, 297, 302, 303, 305, 307, 308, 312, 315, 318, 323, 325, 330, 337, 338, 345, 347, 357, 358, 360, 362, 363, 367, 368, 370, 373, 380, 382, 385, 390, 393, 395, 402, 403, 407, 412, 415, 422, 423, 425, 428, 433, 435, 437, 440, 445, 447, 448, 450, 455, 458, 462, 467, 468, 472, 473, 477, 480, 488, 490, 492, 500, 502, 503, 505, 510, 512, 513, 523, 525, 527, 528, 532, 533, 538, 545, 550, 555, 557, 558, 565, 567, 568, 572, 577, 578, 580, 583, 588. 590, 593, 598, 602, 605, 610, 615, 620, 622, 623, 627, 632, 633, 635, 637, 642, 645, 648, 650, 653, 655, 657, 667, 668, 670, 675, 682, 687, 688, 692, 693, 697, 698, 700, 708, 710.*

3. Ora se ci si vuol limitare a provare che la (1) è possibile per tutti i valori di $l' < 715$, cui corrisponde $n = 1260.715 + 1 = 900\,901$, si deve innanzi tutto sopprimere dai precedenti valori di r quelli < 715, che si ottengono dalle altre forme lineari della Tab. della Sez. I, diverse da quelle utilizzate nel precedente Teorema.

A mezzo delle forme lineari $17l''+1, 8, 12$; $19l''+2, 3, 7, 9, 14, 15$ prima e delle $23l''+1, 2, 3, 14$; $31l''+7, 15, 17, 23$ poi si hanno i seguenti Teoremi.

TEOREMA 3°. - *La (1) è possibile per* $n = 12601\, l' + 1$ *con* l' *della forma* $323\, m + s$ $(m = 1, 2, \ldots)$, *essendo*

$s = 1, 2, 3, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 18, 21, 22, 25, 26, 28, 29, 33, 34, 35, 40, 41, 42, 45, 46, 47, 52, 53, 59, 60, 63, 64, 66, 69, 71, 72, 76, 78, 79, 80, 83, 85, 86, 90, 91, 93, 97, 98, 102, 103, 104, 109, 110, 114, 116, 117, 120, 121, 123, 127, 128, 129, 131, 135, 136, 137, 140, 142, 144, 147, 148, 154, 155, 159, 161, 165, 166, 167, 171, 173, 174, 178, 180, 182, 185, 186, 188, 192, 193, 195, 197, 199, 204, 205, 211, 212, 216, 218, 222, 223, 224, 229, 230, 231, 233, 235, 237, 239, 242, 243, 346, 249, 250, 254, 256, 261, 262, 263, 267, 268, 269, 273, 275, 280, 281, 384, 287, 288, 290, 292, 294, 297, 299, 300, 301, 306, 307, 311, 313, 314, 318, 319.$

TEOREMA 4°. - *La (1) è possibile per* $n = 1260\, l' + 1$, *con* l' *della forma* $713\, m + u$, *essendo*

$u = 1, 2, 3, 7, 14, 15, 17, 23, 24, 25, 26, 37, 38, 46, 47, 48, 49, 54, 60, 69, 70, 71, 72, 77, 79, 83, 85, 93, 94, 95, 100, 106, 108, 110, 116, 117, 118, 129, 131, 139, 140, 141, 147, 152, 162, 163, 164, 170, 172, 175, 178, 185, 186, 187, 193, 198, 201, 203, 208, 209, 210, 221, 224, 231, 232, 233, 234, 240, 244, 254, 255, 256, 263, 265, 267, 271, 277, 278, 279, 286, 290, 294, 296, 300, 301, 302, 313, 317, 323, 324, 325, 327, 333, 336, 346, 347, 348, 356, 358, 359, 364, 369, 370, 371, 379, 382, 387, 389, 392, 393, 394, 395, 405, 410, 415, 416, 417, 418, 420, 426, 428, 438, 439, 440, 441, 449, 451, 457, 461, 462, 463, 472, 474, 480, 482, 484, 485, 486, 488, 497, 503, 507, 508, 509, 511, 513, 119, 520, 530, 531, 532, 534, 542, 543, 544, 550, 553, 554, 555, 565, 566, 573, 575, 576, 577, 578, 581, 589, 596, 599, 600, 601, 604, 606, 612, 622, 623, 624, 627, 635, 637, 643, 645, 646, 647, 658, 666, 668, 669, 670, 674, 681, 689, 691, 692, 693, 697, 699, 704, 705.$

4. Tenendo presente i risultati contenuti nei Teoremi 3° e 4° per $l' < 715$ si trova subito che la (1) è possibile per tutti i valori di r del Teorema 2°, relativi ad $l' = 715\, m + r$, $(m = 0)$, ad eccezione di

$l' = r = 43, 87, 202, 213, 227, 238, 272, 282, 305, 308, 312, 315, 360, 362, 367, 373, 380, 385, 390, 412, 422, 447, 448, 468, 473, 500, 502, 510, 523, 525, 567, 568, 580, 583, 593, 602, 605, 650, 657, 682, 700, 708,$

quindi per dimostrare che la (1) è possibile per $l' < 715$ occorre ancora provare che lo è anche per i precedenti valori di $r = l'$, Ora si hanno immediatamente i risultati ottenuti nella seguente Tabella in cui, accanto ad ogni valore di l' di $n = 1260,\ l' + 1$, è segnato un valore di k e di A' per cui la (1) è possibile

l'	k'	A'	l'	k'	A'	l'	k'	A'	l'	k'	A'
43	19	2^5	315	4	163	448	9	509^2	583	9	97
87	29	$3\cdot5\cdot17$	360	19	453601	468	19	2	593	4	107
202	4	199	362	4	439	473	9	$2\cdot107$	602	14	61^2
213	9	349	367	9	131^2	500	4	67	605	9	401^2
227	9	229^2	373	4	263	502	9	43	650	4	11
238	19	$2\cdot5^2$	380	4	43	510	9	$2\cdot179$	657	14	229^2
272	4	107	385	9	139^2	523	4	227	682	14	971^2
282	19	$2\cdot163$	390	9	157^2	525	4	139	700	4	107
305	19	2^5	412	14	53	567	4	67	708	4	691
308	9	$2\cdot197$	422	4	619	568	19	$2\cdot5$			
312	29	2^2	447	4	311	580	9	$2\cdot107$			

e poichè per $l' = 715$, si ha $n = 900\ 901$, si è provato perciò il seguente

TEOREMA 5°. - *La (1) è possibile in numeri naturali per ogni* $n < 900\ 901$.

5. Si noti che a mezzo delle forme lineari di l' riportate nella Tabella della precedente Sez. 1, si ha che la (1) è possibile anche per $l' = 715$, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732. Ma per $l' = 723$, della (1) si ha soluzione per $k = 4$, $A' = 167$, quindi l'ultimo Teorema si migliora nel seguente

TEOREMA 6°. - *La (1) è possibile in numeri naturali per ogni* $n \leq 922\ 321$.

6. Con i risultati contenuti in questa Nota è agevole spingere più oltre la ricerca, cioè provare la possibilità della (1) per

$$n > 922\ 321$$

e, se si vuole, stabilire altre forme lineari di l' per cui la (1) è possibile. A tal proposito si noti che a soluzioni della (1), come si rileva dalle precedenti Sez. 1 e 4, si è pervenuti con valori di k in generale assai piccoli. Va fatta eccezione forse per i soli casi di $l' = 11l'' + 9$, $13l'' + 1$, $17l'' + 8$, $23l'' + 14$, 87, 312, nei quali soluzione si ha rispettivamente per $k = 44$, 39, 34, 69, 29, 29, ma nella maggior parte di tali casi era spontaneo servirsi degli indicati valori di k per ottenere soluzione della (1).