Bollettino
Unione Matematica Italiana

Gaetano Villari

# Sul carattere oscillatorio delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **13** (1958), n.1, p. 73–78.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_1_73_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

**Sul carattere oscillatorio delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine.**

Nota di Gaetano Villari (a Firenze)

**Sunto.** - *Si studia l'andamento asintotico degli integrali dell'equazione* ($\alpha$) $y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$, *e si stabiliscono per i coefficienti* $p_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) *ipotesi atte a garantire l'equicomportamento, dal punto di vista oscillatorio, di una vasta classe di soluzioni di* ($\alpha$). *Si dànno inoltre criteri di non oscillazione per classi di equazioni del tipo* ($\alpha$).

**Summary.** - *The asymptotic behaviour of the integrals of the differential equation* ($\alpha$) $y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$ *is investigated, and some hypothesis on the coefficients* $p_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$) *are assumed in order to insure that a class of solutions of* ($\alpha$) *has an uniform oscillatory behaviour. Some criteria for non oscillation are established.*

**1.** Data una funzione $u(x)$, definita e continua per $x \geq \xi$, seguendo una definizione ormai di uso comune, diremo che $u(x)$ *presenta carattere oscillatorio,* o brevemente che è *oscillante,* quando, comunque si scelga $\alpha \geq \xi$, esistono zeri di $u(x)$ nell'intervallo $(\alpha + \infty)$; se ciò non accade diremo che $u(x)$ *presenta carattere non oscillatorio* (non è oscillante).

Se $u(x)$ e $v(x)$ sono due funzioni dotate di derivata prima continua per $x \geq \xi$, una semplice condizione sufficiente atta a garantire che $u(x)$ e $v(x)$ presentano il medesimo carattere, cioè sono entrambi oscillanti o entrambi non oscillanti, è che sia non oscillante la funzione $W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$. Ciò porta infatti che, a partire da un certo valore della variabile, $W(x)$ conserva lo stesso segno e pertanto gli eventuali zeri di $u(x)$ e $v(x)$ si separano.

Per un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine è ben nota la proprietà che tutti i suoi integrali presentano il medesimo carattere, ed ha perciò senso parlare di *equazioni oscillanti* o *non oscillanti*; ciò però non si verifica in generale per le equazioni di ordine superiore al secondo.

In quest'ordine di idee M. Švec [1] ha recentemente studiato

[1] M. Švec, *Sur une propriété intégrale de l'équation* $y^{(n)} + Q(x)y = 0$, $n = 3, 4$; Czech. Math. Journ., 7 (82), 1957, 450-462.

il caso delle equazioni del terzo ordine binomie $y^{(3)} + Q(x)y = 0$, nell'ipotesi che la funzione $Q(x)$ sia continua e non negativa per ogni valore reale della variabile $x$, senza essere nulla identicamente in alcun intervallo (non nullo).

Sotto tali condizioni è indicata una classe di soluzioni che godono della proprietà di avere tutte il medesimo carattere, ed è studiato l'andamento (non oscillante) delle curve integrali che non rientrano nella classe indicata.

Nella presente Nota considero il caso delle equazioni complete del terzo ordine, in ipotesi che generalizzano quelle adottate da M. Švec. Si perviene così a risultati che contengono quelli più sopra riferiti, ed in particolare si dànno criteri di non oscillazione per le soluzioni di alcune classi di equazioni lineari omogenee del terzo ordine.

**2.** Si consideri l'equazione

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0, \tag{1}$$

dove le funzioni $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ si suppongono definite e continue per $x \geq \xi$, ed inoltre

$$p_2(x) \leq 0, \qquad p_3(x) \geq 0. \tag{2}$$

Indicando $q(x)$ una primitiva di $p_1(x)$ ($q'(x) = p_1(x)$), e ponendo $a(x) = e^{q(x)}$, $b(x) = a(x)p_2(x)$, $c(x) = a(x)p_3(x)$, l'equazione (1) può scriversi

$$\frac{d}{dx}[a(x)y''] + b(x)y' + c(x)y = 0, \tag{1'}$$

con le condizioni

$$a(x) > 0, \quad b(x) \leq 0, \quad c(x) \geq 0 \qquad (x \geq \xi). \tag{2'}$$

Se poi indichamo con $u(x)$ e $v(x)$ due integrali particolari della (1) ($u(x)$, $v(x) \not\equiv 0$), e poniamo

$$W(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix}, \qquad Z(x) = \begin{vmatrix} u'(x) & v'(x) \\ u''(x) & v''(x) \end{vmatrix},$$

si ha

$$\frac{d}{dx}[a(x)W'(x)] = a(x)Z(x) - b(x)W(x), \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx}[a(x)Z(x)] = c(x)W(x). \tag{4}$$

**3.** Ciò posto, sia $\alpha \geq \xi$ ed indichiamo con $I(\alpha)$ la classe delle soluzioni $u(x)$ dell' equazione (1) che soddisfano ad una almeno delle seguenti condizioni:

$$u(\alpha)u'(\alpha) > 0, \qquad u'(\alpha)u''(\alpha) > 0. \tag{5}$$

Dimostreremo che le funzioni della classe $I(\alpha)$ presentano tutte il medesimo carattere.

Cominciamo dalla prima condizione, cioè dalla sottoclasse delle curve integrali che verificano $u(\alpha)u'(\alpha) > 0$, e per fissare le idee supponiamo $u(\alpha) > 0$.

Se ad una qualunque di tali funzioni associamo l' integrale particolare $v(x)$ della (1) definito dalle condizioni iniziali

$$v(\alpha) = v'(\alpha) = 0, \qquad v''(\alpha) = 1,$$

si ottiene

$$W(\alpha) = 0, \qquad W'(\alpha) > 0, \qquad Z(\alpha) > 0.$$

Esisterà pertanto un conveniente intorno destro di $\alpha$ in cui le funzioni $W(x)$, $W'(x)$ e $Z(x)$ assumono segno positivo, e proviamo che $W(x)$ non può più annullarsi per $x > \alpha$.

Ragioniamo per assurdo, ed indicando con $x_0$ l' estremo superiore dei valori dell' intorno destro di $\alpha$ in cui $W(x)$ si mantiene positiva ($W(x_0) = 0$), supponiamo che $x_0$ sia finito.

Poichè $Z(\alpha) > 0$, nell' intervallo aperto $(\alpha, x_0)$ sarà per la (4) $Z(x) > 0$, e analogamente per la (3) sarà positiva e crescente la funzione $a(x)W'(x)$. Da ciò, risultando $W'(x) > 0$, segue che $W(x)$ è positiva e crescente in tutto l' intervallo considerato, ma allora sarà anche $W(x_0) > 0$, e si cade in assurdo.

Con analogo procedimento, supponendo $u(\alpha) < 0$, si prova che $W(x) < 0$ per $x > \alpha$.

In entrambi i casi si ha dunque $W(x) \neq 0$ per $x > \alpha$; e tenendo conto di quanto è stato detto al n. 1, poichè ciascuna delle curve integrali della sottoclasse considerata ha il carattere di

$v(x)$, ne segue che tutte queste funzioni presentano il medesimo carattere.

Passando al secondo caso delle (5), consideriamo le soluzioni $u(x)$ dell' equazione (1) che verificano la condizione $u'(\alpha)u''(\alpha) > 0$, e per fissare le idee supponiamo $u'(\alpha) > 0$.

Se ad una qualunque di tali funzioni pensiamo di associare l'integrale particolare $v_1(x)$ della (1) definito dalle condizioni iniziali

$$v_1(\alpha) = -1, \qquad v_1'(\alpha) = v_1''(\alpha) = 0,$$

otteniamo $W(\alpha) > 0$, $W'(\alpha) > 0$, $Z(\alpha) = 0$, e seguendo un ragionamento in tutto analogo a quello tenuto nella prima parte di questo numero, si prova che anche in questo caso $W(x) \neq 0$ per $x > \alpha$; e pertanto le funzioni della seconda sottoclasse presentano il medesimo carattere.

Infine, osservando che esistono curve integrali della (1) appartenenti sia alla prima che alla seconda delle sottoclassi considerate, possiamo concludere: *le soluzioni dell' equazione* (1) *che appartengono alla classe* $I(\alpha)$ *presentano tutte il medesimo carattere.*

**4.** Siano adesso $\alpha$ e $\beta$ $(\xi \leq \alpha < \beta)$ due punti distinti dell' intervallo $(\xi, +\infty)$. Per quanto è stato detto al numero precedente le curve integrali della classe $I(\alpha)$ hanno lo stesso carattere, così pure quelle di $I(\beta)$, e vogliamo qui dimostrare che i caratteri di queste due classi coincidono.

Si fissi infatti un integrale $u(x)$ della classe $I(\alpha)$, che verifichi ad esempio le condizioni $u(\alpha) > 0$, $u'(\alpha) > 0$. Per continuità è allora possibile determinare un intervallo $(\alpha, \alpha + \delta)$ nei punti del quale le funzioni $u(x)$ e $u'(x)$ assumono valori positivi, e pertanto, comunque si scelga $0 < \varepsilon \leq \delta$, le curve integrali delle classi $I(\alpha)$ e $I(\alpha + \varepsilon)$ hanno il medesimo carattere.

Ragioniamo per assurdo, ed indicando con $\gamma$ l' estremo superiore dei valori dell' intorno destro di $\alpha$ per cui le funzioni appartenenti a $I(\alpha)$ e $I(x)$ presentano ugual carattere, supponiamo che $\gamma$ sia finito.

Ma in forza dei ragionamenti fatti, tenendo conto che $\gamma > \xi$, è sempre possibile determinare un conveniente $\bar{\delta} > 0$ per cui le curve integrali della classe $I(\gamma - \bar{\delta})$ hanno il medesimo carattere sia delle curve integrali di $I(\alpha)$ che di quelle $I(\gamma)$, e si cade perciò in assurdo.

Ne segue che le soluzioni dell' equazione (1), che in un punto almeno dell'intervallo $(\xi, +\infty)$ verificano una almeno delle condizioni (5) (appartengono alla classe I), presentano tutte il medesimo carattere.

E quando infine si osservi, come facilmente si verifica, che le curve integrali di (1) che in $(\xi, +\infty)$ ammettono uno zero, o per le quali si annulla la derivata prima, ovvero la derivata seconda, rientrano nella classe I ora specificata, possiamo riassumere i risultati ottenuti nel

TEOREMA - *Se valgono le* (2) *le soluzioni dell' equazione differenziale* (1) *presentano tutte il medesimo carattere, fatta eventualmente eccezione di quelle che in ogni punto dell' intervallo* $(\xi, +\infty)$ *verificano simultaneamente le condizioni*

$$u(x)u'(x) < 0, \qquad u'(x)u''(x) < 0. \tag{6}$$

5. Vogliamo adesso mettere in evidenza qualche considerazione che può dedursi dal Teorema precedente.

*a*) Cominciamo con l'osservare che, se una soluzione dell'equazione (1) appartenente alla classe I non è oscillante, allora nessun' altra soluzione può esserlo, in quanto quelle che non appartengono ad I, in forza delle (6), non possono mai annullarsi.

Tale fatto si verifica ad esempio quando alle ipotesi (2) del Teorema enunciato si aggiungono le altre:

$$p_1(x) \leq -1, \qquad -p_2(x) \geq p_3(x), \qquad (x \geq \xi). \tag{7}$$

Per dimostrarlo indichiamo con $v(x)$ un integrale particolare della (1) che in un punto $x_0$ dell' intervallo $(\xi, +\infty)$ verifica le condizioni $v''(x_0) > v'(x_0) > v(x_0) > 0$, ed appartiene pertanto alla classe $I(x_0)$.

In un conveniente intorno destro di $x_0$, ponendo $F(x) = v'(x) - v(x)$, si avrà $v''(x) > v'(x) > v(x) > 0$, $F(x) > 0$, $F'(x) > 0$, e sarà pure, tenendo conto delle (7)

$$\begin{cases} F''(x) \geq [-p_1(x) - 1]v''(x) - p_2(x)F(x) \geq 0, \\ v'''(x) \geq -p_1(x)v''(x) - p_2(x)F(x) > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Facilmente si prova che $v''(x)$ e $F(x)$ non possono avere zeri per $x > x_0$.

Se infatti fosse $\gamma$ $(\gamma < +\infty)$ il primo punto dell'intervallo $(x_0, +\infty)$ in cui si annulla una almeno delle due funzioni considerate, poichè per $x_0 \leq x < \gamma$ valgono le (8), sarebbe anche $F(\gamma) > 0$, $v''(\gamma) > 0$, e ciò è in contraddizione con l'ipotesi fatta.

Sarà dunque $v''(x) > 0$ per $x > x_0$. Ciò esclude che l'integrale $v(x)$, appartenente alla classe I, sia oscillante, e possiamo concludere:

COROLLARIO I. - *Se per* $x \geq \xi$ *si ha* $p_1(x) \leq -1$, $-p_2(x) \geq p_3(x) \geq 0$, *nessuna soluzione dell'equazione* (1) *è oscillante.*

Osserviamo a questo proposito che la condizione $p_1(x) \leq -1$ non è migliorabile, nel senso che, supponendo $p_1(x) \geq -1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ e mantenendo le altre ipotesi, la tesi del Corollario *I* non è più vera in generale.

Basta per questo considerare l'equazione

$$(9) \qquad y''' - (1-\varepsilon)y'' - 2\,\frac{(1+\varepsilon)^2}{2+\varepsilon}\,y' + 2\,\frac{(1+\varepsilon)^2}{2+\varepsilon}\,y = 0,$$

ove $\varepsilon$ è una costante reale positiva.

La (9) ammette infatti l'integrale generale

$$y(x) = c_1 e^{-(1+\varepsilon)x} + e^x \left[ c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}\, x + c_3 \cos \sqrt{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}\, x \right],$$

con $c_1$, $c_2$, $c_3$ costanti arbitrarie, e possiede pertanto infiniti integrali oscillanti.

*b*) Infine, se in aggiunta alle (2) si fanno le ipotesi

$$(10) \qquad |\, p_i(x)\,| \leq \frac{K_i}{x^{2+i+\lambda_i}}, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

ove $K_i$ e $\lambda_i$ sono costanti reali positive, allora esistono ([2]) soluzioni $v(x)$ della (1) che verificano le condizioni $\lim_{x \to +\infty} v(x) = \lim_{x \to +\infty} v'(x) = +\infty$, e perciò appartengono alla classe *I* e non sono oscillanti. È possibile dunque concludere:

COROLLARIO II. - *Se* $p_2(x) \leq 0$, $p_3(x) \geq 0$ *e sono verificate le* (10), *non si hanno soluzioni oscillanti dell'equazione* (1).

([2]) Cfr. G. VILLARI, *Sul comportamento asintotico degli integrali di una classe di equazioni differenziali non lineari*, Rivista Mat. Univ. Parma, 5 (1954), 83-98.