BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LIONELLO CANTONI

Le trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi in una coppia a direzioni caratteristiche indeterminate.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.1, p. 79–83.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_1_79_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Le trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi in una coppia a direzioni caratteristiche indeterminate.

Nota di LIONELLO CANTONI (a Bologna)

Sunto. - *Si studiano le trasformazioni puntuali fra due spazi* S_n, $\overline{S}_n$ *in una coppia regolare di punti corrispondenti a direzioni caratteristiche indeterminate. Vengono anche messi in evidenza alcuni enti algebrici connessi alle trasformazioni in esame ed alla coppia considerata.*

Summary. - *Transformations between two spaces* S_n, $\overline{S}_n$ *in a regular couple of corresponding points with undetermined characteristic directions are studied. Properties of some algebraic entities, intrinsically connected to these transformations are also developed.*

1. Le trasformazioni puntuali in una coppia regolare di punti corrispondenti a direzioni caratteristiche indeterminate (1) sono state studiate dal VILLA (2) che, tra l'altro, ne ha dato una notevole interpretazione geometrica servendosi del noto modello di C. SEGRE.

La questione è stata successivamente ripresa da G. VAONA (3) per una trasformazione puntuale fra piani. Questo A. ha determinato, nel caso in discorso, riferimenti proiettivi intrinseci associati alla coppia considerata e i relativi invarianti.

(1) Una trasformazione puntuale possiede in generale, come è ben noto, un numero finito di direzioni caratteristiche in una coppia regolare di punti corrispondenti; si veda ad es. M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. - I. Intorno del 2° ordine. - II. Intorno del 3° ordine. - Riferimenti intrinseci. - III. Trasformazioni cremoniane osculatrici*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », (8) 4, 55-61, 192-196, 295-303 (1948).

(2) M. VILLA, *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale*, « Atti Acc. delle Scienze di Bologna », (9) 10, 1-15 (1943); M. VILLA, *Varietà quasi-asintotiche e trasformazioni puntuali*, « Annali Univ. di Ferrara », (7) 1, 17-21 (1951); M. VILLA, *Direzioni di osculazione e di iperosculazione di due trasformazioni puntuali*, « Boll. U. M. I. », (3) 2, 188-194 (1947).

(3) G. VAONA, *Trasformazioni puntuali fra due piani in una coppia a direzioni caratteristiche indeterminate*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », (8) 6, 194-197 (1949).

In un lavoro di prossima pubblicazione ([4]) ho studiato il caso delle direzioni caratteristiche indeterminate per le trasformazioni fra spazi a dimensione qualunque determinando riferimenti intrinseci e relativi invarianti per mezzo di certi enti algebrici associati alla trasformazione e alla coppia considerata che vengono introdotti in modo in un certo senso analogo a quello adoperato dal VILLA in un suo noto lavoro ([5]).

Nella presente Nota riporto i risultati conseguiti nel mio lavoro già citato rinviando ad esso per quel che riguarda le dimostrazioni delle varie proposizioni enunciate.

2. Sia T una trasformazione puntuale fra due spazi proiettivi $S_n(x_1, \dots, x_n)$, $\overline{S}_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ed $(O, \bar{O})$ una coppia regolare di punti corrispondenti in T a direzioni caratteristiche indeterminate. Esiste una omografia Ω che oscula la T nella coppia considerata. Con uso conveniente di Ω e di altri enti intrinsecamente associati alla trasformazione e alla coppia considerata, possono fissarsi, sfruttando l'intorno del 3° ordine di T, vari elementi dei riferimenti proiettivi in O, $\bar{O}$ ([6]). Corrispondentemente si avranno per la T, nell'intorno di $(O, \bar{O})$, le seguenti equazioni:

$$\bar{x}_i = x_i + f_3^{(i)}(x) + f_4^{(i)}(x) + [5],$$

$$f_3^{(i)}(x) + \sum_{hkl} a_{hkl}^{(i)} x_h x_k x_l\,, \quad f_4^{(i)}(x) = \sum_{hklm} a_{hklm}^{(i)} x_h x_k x_l x_m$$

$$a_{sss}^{(r)} = 0\,; \quad \sum_{h,k,l} a_{hkl}^{(1)} = \sum_{h,k,l} a_{hkl}^{(2)} = \dots = \sum_{h,k,l} a_{hkl}^{(n)}\,; \quad 1 + \sum_{p,q} a_{ppq}^{(1)} = 0$$

$$(i, h, k, l, m, r, s = 1, 2, \dots, n\,;\ r \neq s\,;\ p, q = 2, 3, \dots, n).$$

3. Una retta uscente da O ha per corrispondente una curva C il cui E_4 (di flesso) di centro $\bar{O}$ in generale non è piano; si dimostra precisamente che:

Le rette di S_n *uscenti da* O *le cui curve corrispondenti sono tali che il relativo* E_4 *di centro* $\bar{O}$ *è piano, sono le* ∞^1 *generatrici*

([4]) L. CANTONI, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi in una coppia a direzioni caratteristiche indeterminate*, « Atti Acc. delle Scienze di Bologna », (11) 5 (1957-58).

([5]) M. VILLA, *Un fascio di quintiche collegato alle trasformazioni puntuali*, « Boll. U. M. I. ». (3) 3, 8-15 (1948).

([6]) Si veda il lavoro cit. in ([4]) n. 2. Al punto attuale, il riferimento proiettivo intrinseco risulterà completamente determinato, una volta fissato (in maniera intrinseca) l'iperpiano improprio in uno dei due spazi.

del cono algebrico Γ *di equazioni:*

$$\left\| \begin{matrix} x_i \\ f_3^{(i)}(x) \\ f_4^{(i)}(x) \end{matrix} \right\| = 0$$

e di ordine

$$N = \frac{1}{6}(1 + 2^{2n+1} - 3^{n+1}) \ (^7).$$

Ogni generatrice del cono $\overline{\Gamma}$ trasformato di Γ in Ω possiede un punto intrinsecamente associato B (8). Si ha così il risultato:

Gli E_4 *piani (di flesso) di centro* $\overline{O}$ *appartenenti alle curve trasformate delle generatrici di* Γ *nella omografia* Ω *determinano, ciascuno sulla propria tangente, un punto intrinsecamente associato* B. *Il luogo di questi punti è una curva algebrica* $\overline{\gamma}$ *appartenente al cono* $\overline{\Gamma}$ *(trasformato di* Γ *in* Ω*) di ordine* $\frac{4^n-1}{3}$ *avente un punto* $\frac{3^n-1}{2}$*-uplo in* $\overline{O}$; *le tangenti a* $\overline{\gamma}$ *in* $\overline{O}$ *sono le rette caratteristiche di* T *uscenti da* $\overline{O}$ (9).

Si trova precisamente che le equazioni complessive di $\overline{\gamma}$ sono:

$$\left\| \begin{matrix} \bar{x}_i \\ f_4^{(i)}(\bar{x}) - 2f_3^{(i)}(\bar{x}) \end{matrix} \right\| = 0.$$

4. Siano date due trasformazioni puntuali T, T' fra due spazi S_n, $\bar{S}_n$ e sia $(O, \bar{O})$ una coppia regolare di punti in cui T, T' si approssimano sino all'intorno di ordine μ $(\mu \geq 1)$. Con scelta opportuna dei riferimenti proiettivi in S_n, $\bar{S}_n$ le T, T' si rappresenteranno nell'intorno di $(O, \bar{O})$ con le equazioni:

$$T)\ \bar{x}_i = x_i + f_2^{(i)}(x) + f_3^{(i)}(x) + \dots + f_\mu^{(i)}(x) + f_{\mu+1}^{(i)}(x) + f_{\mu+2}^{(i)}(x) + [\mu+3]$$

$$T')\ \bar{x}_i = x_i + f_2^{(i)}(x) + f_3^{(i)}(x) + \dots + f_\mu^{(i)}(x) + \varphi_{\mu+1}^{(i)}(x) + \varphi_{\mu+2}^{(i)}(x) + [\mu+3].$$

(7) L'ordine N si determina facendo uso di una nota formula di SALMON. Si veda ad es. M. VILLA, il terzo dei lavori cit. in (2).

(8) Si veda: E. BOMPIANI, *Per lo studio proiettivo differenziale delle varietà*, « Boll. U. M. I. ». (1) 5, 118-126 (1926).

(9) Per $n = 2$ si riottiene una quintica introdotta da G. VAONA nel suo lavoro cit. in (3).

Resta definita al modo noto ([10]) da T, T' una trasformazione fra le coppie r, r^* di rette uscenti da O detta *trasformazione linearizzante relativa a* T *e* T'.

Data la retta r, sia r^* la sua linearizzante e $\bar{r}^*$ la trasformata di r^* in una qualsiasi omografia tangente a T (e a T') in $(O, \bar{O})$ e $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}'$ le curve trasformate della r in T e T'. Se S è un punto generico di $\bar{r}^*$, i coni che da S proiettano $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}'$ hanno lungo tutta la generatrice $S\bar{O}$ un contatto analitico di ordine $\mu+1$. Se la retta r è generica, non esiste su $\bar{r}^*$ alcuna posizione particolare (*punto linearizzante*) del punto S per cui l'ordine di contatto sale a $\mu+2$ (almeno). Si ha precisamente:

Le ∞^1 *rette uscenti da* O *le cui corrispondenti* $\bar{\mathrm{r}}^*$ *sono dotate di punto linearizzante sono le generatrici del cono* K *di equazioni:*

$$\left\| \begin{matrix} x_i \\ f^{(i)}_{\mu+1}(x) - \varphi^{(i)}_{\mu+1}(x) \\ f^{(i)}_{\mu+2}(x) - \varphi^{(i)}_{\mu+2}(x) \end{matrix} \right\| = 0$$

e di ordine

$$N = \frac{\mu(\mu+2)^n - (\mu+1)^{n+1} + 1}{\mu(\mu+1)} .$$

Se in particolare T è la trasformazione considerata al n. 2 e T' è la relativa omografia osculatrice Ω si ha che il cono K non è altro che il cono Γ di cui al n. 3.

5. Se si considera un E_4 di flesso non piano e il piano π dell'E_3 contenuto nel dato E_4, proiettando da un punto P dell'S_3 di appartenenza dell'E_4, l'E_4 stesso su π, si ottiene un E_4 (piano e di flesso) che determina sulla sua tangente un punto B. Il punto così ottenuto dipende solo parzialmente dal centro di proiezione in quanto può dimostrarsi che se consideriamo il piano σ determinato dalla tangente al dato E_4 e da P, il punto B non varia al variare di P su σ. In altre parole, si trova un punto B per ogni piano passante per la tangente all'E_4 dato.

Consideriamo allora la trasformazione T del n. 2 e gli $\bar{E}_4$ ap-

([10]) Si veda M. VILLA, *Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali*, « Compositio Math. », 12, 137-147 (1954); M. VILLA, *Progressi recenti nella teoria delle trasformazioni puntuali*, « Conf. Sem. di Mat. di Bari », 10, 1-18 (1955).

partenenti alle curve di $\bar{S}_n$ trasformate in T delle rette di S_n uscenti da O. Un qualunque $\bar{S}_{n-2}$ passante per $\bar{O}$ sega l'S_3 di appartenenza di ciascun $\bar{E}_4$ lungo una retta passante per $\bar{O}$; la retta, assieme alla tangente all'$\bar{E}_4$ determina un piano e quindi un punto B sulla tangente all'$\bar{E}_4$ stesso. Si ha quindi per ogni $\bar{S}_{n-2}$ fissato una ipersuperficie luogo di questi punti.

Se

$$\left\{\begin{aligned} \sum_i h_i x_i &= 0 \\ \sum_i k_i x_i &= 0 \end{aligned}\right. \tag{1}$$

sono le equazioni dell'$\bar{S}_{n-2}$, la corrispondente ipersuperficie ha equazione:

$$\Sigma\, p_{ij} [\bar{x}_i \{ f_4^{(j)}(\bar{x}) - 2f_3^{(j)}(\bar{x}) \} - \bar{x}_j \{ f_4^{(i)}(\bar{x}) - 2f_3^{(i)}(\bar{x}) \}] = 0 \tag{2}$$

$$p_{ij} = h_i k_j - h_j k_i \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n;\ i < j).$$

Al variare dell'$\bar{S}_{n-2}$ (cioè delle h_i, k_j nelle (1)) la ipersuperficie (2) varia, descrivendo un sistema algebrico A di dimensione $2(n-2)$.

Il sistema A è un ente intrinsecamente associato alla trasformazione ed alla coppia considerata e lo è pure il sistema lineare L di dimensione minima che contiene A e che ha per equazione ancora la (2) in cui però le p_{ij} vengano considerate come parametri indipendenti. Si ha che:

Il sistema lineare L (e quindi il sistema algebrico A) ha come base la curva $\bar{\gamma}$ del cono $\bar{\Gamma}$ introdotta al n. 3.

Sfruttando convenientemente [11] il sistema lineare L si completa la determinazione dei riferimenti intrinseci e si ottengono per T le seguenti equazioni canoniche:

$$\bar{x}_i = x_i + \sum_{hkl} a_{hkl}^{(i)} x_h x_k x_l + \sum_{hklm} a_{hklm}^{(i)} x_h x_k x_l x_m + [5]$$

$$a_{sss}^{(r)} = 0;\ \sum_{hkl} a_{hkl}^{(1)} = \sum_{hkl} a_{hkl}^{(2)} = \dots = \sum_{h,k,l} a_{hkl}^{(n)};\ 1 + \sum_{p,q} a_{ppq}^{(1)} = 0$$

$$a_{jjjj}^{(i)} + 4a_{ijjj}^{(i)} + 6a_{iijj}^{(i)} + 4a_{iiij}^{(i)} + a_{iiii}^{(i)} = a_{iiii}^{(j)} + 4a_{jiii}^{(j)} + 6a_{jjii}^{(j)} + 4a_{jjji}^{(j)} + a_{jjjj}^{(j)}$$

$$(i, h, k, l, m, r, s = 1, 2, \dots, n;\ p, q = 2, 3, \dots, n;\ r \neq s;\ j = i + 1 \text{ per } i \neq n \quad j = 1 \text{ per } i = n).$$

[11] Si veda il lavoro cit. in [4] n. 7.