Bollettino
Unione Matematica Italiana

F. R. Marsicano

Sobre las ecuaciones del movimento del satélite.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.2, p. 214–216.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_214_0>

Sobre las ecuaciones del movimiento del satélite.

Nota di F. R. MARSICANO (a Turdera, Argentina)

Resumen. - *A partir de la memoria fundamental de* G. G. HILL [1]; *todos los autores que se han ocupado del estudio del movimiento del satélite han mantenido los supuestos básicos que son:* 1) *movimiento plano* 2) *pequeñez despreciable de la masa del satélite con respecto a la del planeta, de manera de no influir sobre el movimiento de esto ultimo alrededor del sol.* 3) *adopción de condiciones iniciales tales que el planeta ejecute un movimiento circular uniforme alrededor del sol.* 4) *eliminación de la paralaje solar por el supuesto de estar el sol lo suficientemente alejado del planeta.*

La no observación de esta ultima condición ha permitido al profesor C. AGOSTINELLI [2] *hallar soluciones periodicas que son solo simétricos con respecto al eje sol-planeta en lugar de serlo con respecto a ese eje y al eje normal que pasa por el planeta, como en el caso de* HILL.

Nosotros abandonamos la hipótesis simplificativa del movimiento circular uniforme del planeta alrededor del sol; suponiendo en cambio un movimiento elíptico alrededor del baricentro sol-planeta que por añadidura suponemos fijo y coincidente con el sol, dada la pequeñez de la masa del planeta con respecto al mismo.

Equaciones del movimiento.

Sea S el sol, coincidente con el baricentro G y origen de la terna fija $\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k}$ donde $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}$ T el planeta cuya trayectoria es una elipse de semieje mayor a y de foco S; $\boldsymbol{i}_1\, \boldsymbol{j}_1\, \boldsymbol{k}_1$ la terna relativa de origen T; eje $\boldsymbol{i}_1$ de dirección $\overline{S - T}$ y eje $\boldsymbol{j}_1$ de dirección normal; L el satélite de coordinados relativos $x\ y$; ρ y φ el radio vector y la anomalía verdadera del planeta; m_S la masa del sol; m_T la del planeta; m_L la del satélite que la suponemos unitaria y despreciable con respecto a m_S y a m_T. La ecuación vectorial del movimiento relativo de L es:

$$\boldsymbol{A}_r = \boldsymbol{F}_S + \boldsymbol{F}_T - \boldsymbol{A}_a - \boldsymbol{A}_c \tag{1}$$

(1) *Researches in the lunar theory,* « American Journal of Mathematics » vol. I, pp. 5-26; 129-147; 245-260 ano 1878.

(2) *Sopra un caso del problema ristretto dei tre corpi più generale di quelli di Hill,* « Boll. U. M. I. » serie III ano VIII n. 4 Dicembre 1953.

Id. id., *Su una soluzione periodica del problema ristretto dei tre corpi più generale di quelli di Hill,* « Rend. del Sem. Mat. dell'Università e Politecnico di Torino » vol. 13 ano 1953-54.

donde $\boldsymbol{A}_r$ es la aceleración relativa:

(2) $$\boldsymbol{A}_r = \ddot{x}\boldsymbol{i}_1 + \ddot{y}\boldsymbol{j}_1$$

$\boldsymbol{F}_T$ la fuerza de atracción del planeta:

(3) $$\boldsymbol{F}_T = \frac{-m_T x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,\boldsymbol{i}_1 - \frac{m_T y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,\boldsymbol{j}_1$$

$\boldsymbol{F}_S$ fuerza de atracción del sol:

(4) $$\boldsymbol{F}_S = \frac{m_S}{(x+\rho)^2}\,\boldsymbol{i}_1$$

(despreciamos la paralaje solar).

$\boldsymbol{A}_a$ aceleración de arrastre:

(5) $$\boldsymbol{A}_a = \ddot{\varphi}\boldsymbol{k}_1 \wedge \overline{L-T} + \dot{\varphi}\boldsymbol{k}_1 \wedge (\dot{\varphi}\boldsymbol{k}_1 \wedge \overline{L-T}) + \boldsymbol{A}_T$$

que desarrollada queda:

(6) $$\ddot{\varphi}\boldsymbol{k}_1 \wedge \overline{L-T} = -y\ddot{\varphi}\boldsymbol{i}_1 + x\ddot{\varphi}\boldsymbol{j}_1$$

(7) $$\dot{\varphi}\boldsymbol{k}_1 \wedge \overline{L-T} = -y\dot{\varphi}\boldsymbol{i}_1 + x\dot{\varphi}\boldsymbol{j}_1$$

(8) $$\dot{\varphi}\boldsymbol{k}_1 \wedge (\dot{\varphi}\boldsymbol{k}_1 \wedge \overline{L-T}) = -x\dot{\varphi}^2\boldsymbol{i}_1 - y\dot{\varphi}^2\boldsymbol{j}_1$$

$\boldsymbol{A}_T$ aceleración del planeta, que como sapemos es totalmente radial:

(9) $$\boldsymbol{A}_T = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{i}_1$$

Reemplezando (6) (8) y (9) en (5) se obtiene:

(10) $$\boldsymbol{A}_a = (-y\ddot{\varphi} - x\dot{\varphi}^2 + \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{i}_1 + (x\ddot{\varphi} - y\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{j}_1 .$$

La aceleración de Coriolis vale:

(11) $$\boldsymbol{A}_c = 2\dot{\varphi}\boldsymbol{k}_1 \wedge (\dot{x}\boldsymbol{i}_1 + \dot{y}\boldsymbol{j}_1) = -2\dot{\varphi}\dot{y}\boldsymbol{i}_1 - 2\dot{\varphi}\dot{x}\boldsymbol{j}_1 .$$

Reemplezando ahora (2) (3) (4) (10) y (11) en (1) y separando los términos según los dos ejes coordenados, se obtienen lsa dos equaciones escalones del movimiento relativo de L:

$$(12)\quad \begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{m_T x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{m_S}{(x+\rho)^2} - y\ddot{\varphi} - x\dot{\varphi}^2 + \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + \dfrac{m_T y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + x\ddot{\varphi} - y\dot{\varphi}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi} = 0. \end{cases}$$

Si llamamos e a la excentricidad de la órbita del planeta y nt a la anomalia media contada a partir del perihelio, puede expresarse ρ y φ mediante los fórmulas de LAGRANGE para el desarrollo de las funciones implicitas (3):

$$(13)\quad \begin{aligned} \rho &= a\left[1 - e\cos nt + e^2 \operatorname{sen}^2 nt + \frac{1}{2} e^3 \frac{d}{dnt}\operatorname{sen}^3 nt + \dots\right] \\ \varphi &= nt + \left(2e - \frac{e^3}{4} + \dots\right)\operatorname{sen} nt + \left(\frac{t}{4} e^2 \dots\right)\operatorname{sen} 2nt + \dots . \end{aligned}$$

Despreciando la segunda potencia de la excentricidad se obtienen las seguientes expresiones aproximadas:

$$(14)\quad \begin{aligned} &\rho \cong a(1 - e\cos nt) && \varphi \cong nt + 2e \operatorname{sen} nt \\ &\dot{\rho} \cong nae \operatorname{sen} nt && \dot{\varphi} \cong n(1 + 2e\cos nt) \\ &\ddot{\rho} \cong n^2 ae \cos nt && \ddot{\varphi} \cong -2en^2 \operatorname{sen} nt \\ &\rho\dot{\varphi}^2 \cong an^2(1 + 3e\cos nt) && \dot{\varphi}^2 \cong n^2(1 + 4e\cos nt). \end{aligned}$$

Con las simplificaciones introducidas en (14) las equaciones (12) adquieren la forma definitiva siguiente:

$$(15)\quad \begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{m_T x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{m_S}{[x + a(1 - e\cos nt)]^2} + 2yen^2 \operatorname{sen} nt - \\ - xn^2(1 + 4e\cos nt) - an^2(1 + 2e\cos nt) - 2\dot{y}n(1 + 2e\cos nt) = 0 \\ \ddot{y} + \dfrac{m_T y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} - 2xen^2 \operatorname{sen} nt - yn^2(1 + 4e\cos nt) + \\ 2\dot{x}n(1 + 2e\cos nt) = 0. \end{cases}$$

Si en (15) hacemos $e = 0$ volvemos a encontrar las ecuaciones de HILL.

(3) F. ZAGAR, *Astronomia Sferica e Teorica*, Nicola Zanichelli, Bologna 1948 p. 351-353 y 471.