Bollettino Unione Matematica Italiana

Bruno Bertotti

Trasformazioni di coordinate e movimento browniano.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.2, p. 217–223.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_2_217_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Trasformazioni di coordinate e movimento browniano.

Nota di BRUNO BERTOTTI (a Pavia).

Sunto. - *Si studia il comportamento delle varie grandezze che intervengono nei processi di* MARKOFF *su una varietà differenziabile al mutare del riferimento e si osserva che essi possono venire caratterizzati in maniera invariante attraverso i momenti degli incrementi delle coordinate; tali considerazioni vengono poi applicate alla teoria del movimento browniano.*

Summary. - *The problem we are concerned with is the behaviour of the quantities which occur in a* MARKOFF *process on a differentiable manifold when the reference system is changed. We notice that such processes can be characterized in an invariant way by means of the moments of the coordinate increments; and apply these considerations to the theory of Brownian movement.*

1. Un processo di MARKOFF su una varietà differenziabile V_n ad n dimensioni è caratterizzato da una funzione $P(y, s; X, t)$ definita per ogni punto y di V_n, per ogni valore dei due parametri s e t (con $s < t$) e per ogni insieme X di punti V_n. Essa rappresenta la probabilità che la «particella» si trovi all'istante t nell'insieme X quando si sappia che all'istante s si trovava nel punto y; ed è quindi non negativa e normalizzata. Supporremo nel seguito che a P corrisponda una densità di probabilità p, per cui per un elemento di volume infinitesimo $d^n x$ attorno al punto x potremo scrivere:

$$P(y, s; d^n x. t) = p(y, s; x, t)\ d^n x; \tag{1}$$

e, in generale:

$$P(y, s; X, t) = \int_X p(y, s; x, t)\ d^n x. \tag{2}$$

La funzione $p(y, s; x, t)$ soddisfa all'equazione integrale di KOLMOGOROFF:

$$p(y, s; x, t) = \int_{V_n} p(y, s; z, r)\ p(z, r; x, t)\ d^n z, \tag{3}$$

ove $s < r < t$ [1].

[1] Per una esposizione esauriente della teoria dei processi stocastici e del movimento browniano citiamo solo i trattati:

A. KOLMOGOROFF, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*, Berlino, 1933.

PAUL LÉVY, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Parigi, 1948;

J. L. DOOB, *Stochastics processes*, New York, 1953:

Si noti che per la definizione del processo non è necessario attribuire alla varietà V_n una connessione o una metrica; è sufficiente che essa sia una varietà « amorfa » differenziabile, definita come l'insieme dei punti in corrispondenza biunivoca con le n-uple di coordinate x^i ([2]): la funzione $p(y, s; x, t)$ è una generica funzione delle $2n+2$ variabili y^i, s, x^i e t e non implica l'esistenza di alcuna relazione tra i vettori associati ai punti y e x, anche se infinitamente vicini, né tanto meno la definizione di una loro distanza. È vero che ogni processo stocastico reale viene costruito fisicamente su una varietà dotata di una ben determinata struttura metrica (ad esempio, una ordinaria superficie); ciò però non toglie che, una volta che sia assegnata la funzione $p(y, s; x, t)$, dalla metrica si possa totalmente prescindere.

Vogliamo studiare nel presente lavoro il comportamento delle grandezze che intervengono nel processo quando si effettui una generica trasformazione di coordinate sulla V_n:

$$x^i = f^i(x'^j), \tag{4}$$

ove le $f^i(x'^j)$ sono funzioni analitiche.

Osserviamo subito che, per il suo significato fisico, la funzione p ha il carattere di densità scalare rispetto a un cambiamento delle variabili di « arrivo » x^i; nel nuovo sistema di riferimento x'^i

$$p' = p\ J\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, \tag{5}$$

ove $J\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ è lo jacobiano della trasformazione (4). Inoltre p è una grandezza scalare rispetto alle variabili di « partenza » y^i.

Nello studio dell'equazione di KOLMOGOROFF (3) si considerano integrali del tipo:

$$\mu_1{}^i(y; s, t) = \int\limits_{V_n} (x^i - y^i)\ p(y, s; x, t)\ d^n x, \tag{6}$$

$$\mu_2{}^{ik}(y; s. t) = \mu_2{}^{ki} = \int\limits_{V_n} (x^i - y^i)\ (x^k - y^k)\ p(y, s; x, t)\ d^n x, \tag{7}$$

([2]) Avvisiamo che gli indici latini variano sempre da 1 a n; sarà usata nel seguito la convenzione di somma.

ecc. Essi si possono indicare con il nome di momenti degli incrementi delle coordinate del primo, secondo, ecc. ordine; si noti subito, tuttavia, che ciascuno di essi non ha alcun significato fisico immediato, né è un'entità tensoriale ([3]). Ci si può chiedere, tuttavia, se la conoscenza dei momenti di *tutti* gli ordini in un sistema di riferimento assegnato permetta di calcolarli in un altro; se, cioè, esista una legge di trasformazione a cui essi obbediscono. Essa può essere facilmente ottenuta sostituendo nelle espressioni dei momenti alle differenze $x^i - y^i$ i relativi sviluppi in serie:

$$x^i - y^i = f^i(x'^j) - f^i(y'^j) = \frac{\partial f^i(y'^j)}{\partial y'^r}(x'^r - y'^r) + \tag{8}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f^i(y'^j)}{\partial y'^r \partial y'^s}(x'^r - y'^r)(x'^s - y'^s) + \dots .$$

Se si suppone che esistano tutti i momenti relativi alle nuove variabili accentate, si arriva ad esprimere formalmente ciascun momento relativo alle variabili originarie con una serie in cui compaiono linearmente *tutti* i momenti d'ordine non inferiore relativi alle nuove variabili; per esempio, per i primi due ordini, si ha:

$$\mu_1{}^i = \frac{\partial f^i}{\partial y'^r}\mu_1{}'^r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f^i}{\partial y'^r \partial y'^s}\mu_2{}'^{rs} + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f^i}{\partial y'^r \partial y'^s \partial y'^q}\mu_3{}'^{rsq} + \dots , \tag{9}$$

$$\mu_2{}^{ik} = \frac{\partial f^i}{\partial y'^r}\frac{\partial f^k}{\partial y'^s}\mu_2{}'^{rs} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f^i}{\partial y'^q}\frac{\partial^2 f^k}{\partial y'^r \partial y'^s} + \frac{\partial f^k}{\partial y'^r}\frac{\partial^2 f^i}{\partial y'^s \partial y'^q}\right]\mu_3{}'^{rsq} + \dots . \tag{10}$$

La successione di funzioni delle y^r $\mu_1{}^i$, $\mu_2{}^{ik}$, $\mu_3{}^{ikh}$, ecc., in corrispondenza ad ogni coppia s, t, può quindi venire riguardata come *unico* ente, caratterizzato da una ben determinata legge di trasformazione lineare omogenea: è appunto tale ente che ha significato fisico, e non i singoli momenti, che ne costituiscono le componenti. Il suo annullarsi è una proprietà indipendente dal riferimento, e corrisponde ad un processo deterministico e statico, in cui viene conservata la distribuzione di probabilità iniziale; ciò infatti si ottiene quando la funzione p ha la forma

([3]) Vedi, per un'osservazione analoga, M. PASTORI « Boll. Un. Mat. Italiana », (3), **11** (1956), p. 72.

di una funzione δ di DIRAC:

$$p(y, s;\ x, t) = \delta(x^1 - y^1)\ \delta(x^2 - y^2) \ldots \delta(x^n - y^n); \tag{11}$$

il che, espresso in maniera più rigorosa, significa che la funzione additiva d'insieme $P(y, s;\ X, t)$ è eguale a uno o a zero a seconda che l'insieme X contenga o no il punto y. Si noti, tuttavia, che le serie così ottenute formalmente non convergono necessariamente; l'esistenza dei momenti di ciascun ordine è quindi relativa al riferimento assunto.

Solo le proprietà dei momenti invarianti rispetto alla trasformazione (9), (10), ... hanno significato intrinseco. Tra queste vogliamo anzitutto annoverare il carattere invariante della somma e della moltiplicazione per uno scalare, che seguono immediatamente dalla linearità e dall'omogeneità delle formule (9), (10), ... Notiamo poi che, una volta assegnata la (9), le altre si possono riassumere dicendo che tutti gli altri momenti si trasformano come prodotti (totalmente simmetrici) di momenti del primo ordine; in altre parole, μ_2^{ik}, μ_3^{ikh}, ... si trasformano come $\mu_1^i\mu_1^k$, $\mu_1^i\mu_1^k\mu_1^h$, ... Da ciò possiamo subito concludere che le condizioni

$$\begin{gathered} \mu_2^{ik} = \mu_1^i\mu_1^k, \\ \mu_3^{ikh} = \mu_1^i\mu_1^k\mu_1^h, \ \text{ecc.} \end{gathered} \tag{12}$$

sono invarianti. Ad esse corrisponde fisicamente un processo deterministico, in cui i momenti degli incrementi delle coordinate attorno alla media

$$m_2^{ik} = \int_{V_n} (x^i - y^i - \mu_1^i)\ (x^k - y^k - \mu_1^k)\ p\ d^nx = \mu_2^{ik} - \mu_1^i\mu_1^k \tag{13}$$

$$\begin{aligned} m_3^{ikh} &= \int_{V_n} (x^i - y^i - \mu_1^i)\ (x^k - y^k - \mu_1^k)\ (x^h - y^h - \mu_1^h)\ p\ d^nx = \\ &= \mu_3^{ikh} - \mu_1^i\mu_2^{kh} - \mu_1^h\mu_2^{ik} - \mu_1^k\mu_2^{hi} + 2\mu_1^i\mu_1^k\mu_1^h, \ \text{ecc.}, \end{aligned} \tag{14}$$

sono tutti nulli. Osserviamo infine che l'annullarsi di tutti i momenti di ordine superiore a un intero positivo m ha significato intrinseco, perchè la trasformazione che li riguarda non involge quelli di ordine inferiore o eguale a m.

2. Un esempio assai importante della proprietà ora accennata (per $m = 2$) ci è offerto dal movimento browniano. Esso è caratterizzato dal fatto che, al tendere di t a s, i momenti di ordine superiore al secondo sono infinitesimi di ordine superiore a $t - s$; per i primi due poniamo:

$$(15) \qquad \lim_{t \to s} \frac{1}{t-s} \mu_1{}^i(x;\, s,\, t) = A^i(x,\, t),$$

$$(16) \qquad \lim_{t \to s} \frac{1}{t-s} \mu_2{}^{ik}(x;\, s,\, t) = B^{ik}(x,\, t).$$

I valori medi dello spostamento in una direzione qualsiasi in un intervallo di tempo infinitesimo dt, come pure i valori medi dei quadrati degli spostamenti, sono proporzionali a dt. È connesso con questa proprietà il fatto che le funzioni $x^i(t)$ che descrivono il movimento di una particella browniana non sono, con probabilità uno, a variazione limitata, e la traiettoria descritta in un determinato intervallo di tempo ha lunghezza infinita.

Le formule di trasformazione (9) e (10), e il fatto che

$$(17) \qquad \lim_{t \to s} \frac{1}{t-s} \mu_m^{i_1 i_2 \ldots i_m} = 0 \ (\text{per } m > 2),$$

permettono immediatamente di concludere che le grandezze A^i e B^{ik} si trasformano, al mutare del riferimento, con la legge:

$$(18) \qquad A^i = A'^r \frac{\partial f^i}{\partial x'^r} + \frac{1}{2} B'^{rs} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x'^r \partial x'^s}$$

$$(19) \qquad B^{ik} = B'^{rs} \frac{\partial f^i}{\partial x'^r} \frac{\partial f^k}{\partial x'^s}.$$

B^{ik} si comporta quindi come un tensore doppio simmetrico; ma A^i è un vettore solo per trasformazioni lineari di coordinate.

Si dimostra che, sotto la condizione (17) ed altre ipotesi di regolarità, dall'equazione di Kolmogoroff (3) si deduce per la funzione $p(y,\, s;\, x,\, t)$ un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine, detta di Fokker–Planck:

$$(20) \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial (A^i p)}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (B^{ik} p)}{\partial x^i \partial x^k} \quad (^4).$$

(4) Per maggiori dettagli su questa equazione, la maniera di giungervi e il suo significato fisico, si veda per esempio, Ming Chen Wang and G. E. Uhlenbeck, *On the theory of Brownian motion*, « Rev. of Mod. Phys. », **17** (1945), pp. 323-342.

Le funzioni che in essa intervengono a definire il processo di diffusione $A^i(x)$ e $B^{ik}(x)$ hanno un significato fisico: le $A^i(x)$ descrivono, per così dire, il campo di forze in cui la particella browniana si muove, mentre le $B^{ik}(x)$ danno una misura della « vivacità » della diffusione. Per il modo come vi si giunge (l'equazione di KOLMOGOROFF (3) è ovviamente invariante) la (20) deve conservare la sua forma quando si operi una trasformazione generica di coordinate (4), purchè naturalmente ad $A^i(x)$ e $B^{ik}(x)$ si sostituiscano le corrispondenti espressioni calcolate mediante le (15) e (16) nelle nuove coordinate. Vogliamo ora verificare tale fatto tenendo conto della legge di trasformazione (18) e (19).

Poichè $\frac{\partial p}{\partial t}$ è una densità scalare, tale deve essere anche il secondo membro della (20), che si può scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left[-A^i p + \frac{1}{2}\frac{\partial(B^{ik}p)}{\partial x^k}\right].$$

Ciò accade quando l'espressione tra parentesi quadre è una densità vettoriale controvariante; poichè non ci interessano i valori effettivi delle componenti del tensore simmetrico B^{ik}, ma solo le sue proprietà di varianza, possiamo prendere in particolare:

$$B^{ik} = B^i B^k, \tag{21}$$

ove B^i è un vettore. In tal caso, trascurando il termine $\frac{1}{2} B^i \frac{\partial(B^k p)}{\partial x^k}$ che è già per suo conto una densità vettoriale controvariante, tutto si ridurrà a mostrare che

$$-A^i + \frac{1}{2}\frac{\partial B^i}{\partial x^k} B^k$$

è un vettore controvariante. Ricordando che

$$B^i = B'^r \frac{\partial f^i}{\partial x'^r},$$

si ha:

$$-A^i + \frac{1}{2}\frac{\partial B^i}{\partial x^k} B^k = -A^i + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x'^s}\left[B'^r \frac{\partial f^i}{\partial x'^r} B'^s\right] =$$

$$= -A^i + \frac{1}{2} B'^r B'^s \frac{\partial^2 f^i}{\partial x'^r \partial x'^s} + \frac{1}{2}\frac{\partial B'^r}{\partial x'^s} B'^s \frac{\partial f^i}{\partial x'^r}.$$

Ponendo ora al posto di A^i l'espressione ricavata dalla (18) si ottiene subito

$$- A^i + \frac{1}{2} \frac{\partial B^i}{\partial x^k} B^k = \left[- A'^r + \frac{1}{2} \frac{\partial B'^r}{\partial x'^s} B'^s \right] \frac{\partial f^i}{\partial x'^r},$$

che è proprio ciò che si voleva dimostrare.

3. La legge di trasformazione (18) mostra che con una opportuna trasformazione delle variabili x' ci si può sempre ridurre al caso in cui i coefficienti A' siano nulli. Basterà infatti scegliere le funzioni di trasformazione $f^i(x'^j)$ in maniera che siano soddisfatte le n equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico ([5]):

$$A'^r \frac{\partial f^i}{\partial x'^r} + \frac{1}{2} B'^{rs} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x'^r \partial x'^s} = 0. \tag{22}$$

I valori dei coefficienti B'^k si ottengono allora dalla (19). Mentre le grandezze B^{ik}, che costituiscono un tensore, hanno di per sè un significato intrinseco, così non è per le A^i; la diffusione è quindi caratterizzata dall'insieme delle grandezze A^i e B^{ik}.

Vogliamo infine osservare che il nostro criterio di invarianza suggerisce la considerazione di processi di MARKOFF più generali di quelli browniani, definiti dalla condizione che i momenti di ordine superiore ad m (con $m > 2$) siano infinitesimi di ordine superiore a $t - s$ al tendere di t ad s. La funzione di transizione $p(y, s; x, t)$ per tali processi obbedirà a un'equazione alle derivate parziali di ordine m.

([5]) È facile vedere che tutti i momenti di ordine pari danno luogo a delle forme definite positive. Ad esempio, dalla (6) si deduce che la forma quadratica

$$\mu_2^{ik} v_i v_k = \int_{V_n} [(x^i - y^i) v_i]^2 p \, d^n x$$

è sempre non negativa, essendo la funzione integranda positiva o nulla. Per la (16), anche il tensore B^{ik} definisce quindi una forma quadratica positiva.