Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Vaona

Deformazione proiettiva dei tritessuti e delle trasformazioni puntuali di 2ª specie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 295–300.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_295_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Deformazione proiettiva dei tritessuti e delle trasformazioni puntuali di 2ª specie.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna)

Sunto. - *Si comunicano alcuni risultati sulla deformazione proiettiva dei tritessuti di 2ª specie di curve piane e se ne fanno delle applicazioni alla teoria della deformazione proiettiva delle trasformazioni puntuali di 2ª specie.*

Summary. - *Author relates some results concerning the theory of projective applicability of three-web of the second kind. These results are applied to the theory of punctual transformations of the second kind.*

1. Introduzione.

In un lavoro in corso di stampa (¹) ho stabilito alcuni risultati sull'applicabilità proiettiva dei tritessuti di 2ª specie di curve piane dai quali seguono talune applicazioni alla teoria dell'applicabilità proiettiva delle trasformazioni puntuali di 2ª specie fra piani introdotta da M. VILLA (²).

La presente Nota, oltre che riferire sui risultati dimostrati nel lavoro ricordato in principio, ha lo scopo di segnalare appunto alcune applicazioni dei risultati stessi alla anzidetta teoria.

Nei nn. 2, 3, 4 si riferiscono i risultati conseguiti sulla deformazione proiettiva dei tritessuti di 2ª specie. Nei nn. 5, 6, vengono determinate le trasformazioni puntuali di 2ª specie che ammettono infinite deformazioni proiettive forti. Infine nel n. 7 si fanno alcune osservazioni sui diversi tipi di deformazione proiettiva di una trasformazione di 2ª specie.

(¹) G. VAONA, *Sulla deformazione proiettiva dei tritessuti di 2ª specie di curve piane*, « Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna » (11), **5** (1958).

(²) M. VILLA, *Applicabilità proiettiva fra superficie di 2ª specie della V_4 di Segre*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3) **11**, pp. 493-495 (1956). Si veda anche: F. SPERANZA *Applicabilità proiettiva fra trasformazioni puntuali di 2ª specie* « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), **11**, pp. 526-537 (1956).

2. Deformazione proiettiva di un tritessuto di 2^a specie.

Si chiama tritessuto l'ente costituito da tre schiere ∞^1 di curve piane tali che per ogni punto del piano (o di una sua regione) passa una ed una sola curva di ciascuna schiera. Un tritessuto si dice di 2^a specie quando due delle tre schiere di curve coincidono.

Una trasformazione puntuale T che trasforma un tritessuto di 2^a specie Δ in un altro tritessuto Δ' si dice *un'applicabilità o deformazione proiettiva* di Δ, Δ' se T è una trasformazione di 2^a specie della quale Δ, Δ' sono i tritessuti caratteristici.

È noto che un generico tritessuto di 2^a specie è proiettivamente indeformabile e che i tritessuti proiettivamente deformabili dipendono da una funzione arbitraria di due variabili.

Nel lavoro menzionato in principio ho determinati i tritessuti di 2^a specie che ammettono infinite deformazioni proiettive le quali necessariamente dipendono: o da una funzione arbitraria di una variabile, o da una costante arbitraria (3).

3. I tritessuti di 2^a specie che ammettono infinite deformazioni dipendenti da una funzione arbitraria di una variabile.

Esistono tritessuti che sono deformabili in infiniti modi dipendenti al più da una funzione arbitraria di una variabile. Ho anzitutto dimostrato:

Affinchè un tritessuto di 2^a specie possegga infinite deformazioni proiettive dipendenti da una funzione arbitraria di una variabile è necessario che le curve della schiera doppia siano rette.

La condizione precedente non è tuttavia sufficiente, poichè un tritessuto, la cui schiera doppia è costituita di rette, in generale, è addirittura indeformabile.

Esistono due tipi di tritessuti che ammettono infinite deformazioni dipendenti da una funzione arbitraria di un argomento. Essi sono caratterizzati rispettivamente dalle seguenti proprietà geometriche:

I) *Le tangenti alle curve della schiera semplice nei punti di una retta generica della schiera doppia stanno in un fascio.*

(3) Le analoghe questioni per i tritessuti e le trasformazioni di 1^a specie sono trattate nei lavori: G. VAONA, *Sulla deformazione proiettiva dei tritessuti di curve piane*, « Ann. Mat. Pura ed Appl. », (4), **46**, pp. 43-70 (1958); G. VAONA, *Sulla deformazione proiettiva delle trasformazioni puntuali di* 1^a *specie fra piani*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3), **13**, pp. 234-239 (1958).

II) *Le curve del tritessuto sono le proiezioni da un punto su un piano delle curve asintotiche di una superficie rigata avente una linea flecnodale piana* (4).

I tritessuti del I) tipo dipendono da tre funzioni arbitrarie di una variabile, quelli del II) tipo da due.

Ho dimostrato pure che: *Ogni tritessuto del* I) *tipo ammette infinite deformazioni, dipendenti da una funzione arbitraria di una variabile. che lo trasformano in un tritessuto del* I) *tipo ed ammette una deformazione isolata che lo trasforma in un tritessuto del* II) *tipo. Ogni tritessuto del* II) *tipo è deformabile soltanto in tritessuti del* I) *tipo.*

Segue dunque che le due classi di tritessuti si deducono l'una dall'altra per deformazioni proiettive.

Prima di passare alla ricerca dei tritessuti che ammettono infinite deformazioni dipendenti da costanti arbitrarie, ho studiato i tritessuti la cui schiera doppia è costituita di rette e che non appartengono alle due classi precedenti.

È noto che esistono altri tritessuti, oltre quelli esaminati, che godono della suddetta proprietà e che sono proiettivamente deformabili. Essi dipendono da cinque funzioni arbitrarie di una variabile (5).

Orbene ho dimostrato che: *Esclusi i tritessuti del* I) *e* II) *tipo, menzionati sopra, un tritessuto di* 2^a *specie, la cui schiera doppia è costituita di rette, è proiettivamente deformabile al più in un modo.*

4. I tritessuti di 2^a specie che ammettono ∞^1 deformazioni proiettive.

Ho dimostrato anzitutto che: *Non esistono tritessuti di* 2^a *specie che ammettono* ∞^h *deformazioni proiettive per* $h > 1$.

Esistono invece tritessuti di 2^a specie che ammettono ∞^1 deformazioni e, in base ai risultati ricordati nel n. precedente, questi tritessuti vanno ricercati fra quelli la cui schiera doppia è costituita di curve che *non sono rette.*

(4) Si dice linea flecnodale di una rigata una curva luogo dei flessi delle curve asintotiche non rettilinee.

(5) Infatti da cinque funzioni di una variabile dipendono le trasformazioni puntuali di 2^a specie che posseggono una schiera doppia di curve caratteristiche formata da rette. Si veda: L. MURACCHINI, *Sulle trasformazioni puntuali di* 2^a *e* 3^a *specie fra piani proiettivi*, « Mem. Accad. Sci. Torino », (3), 1, pp. 25-44 (1953)

Supponiamo che le curve del tritessuto siano le curve $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ rappresentate dalle equazioni

$$x = x(u, v), \tag{1}$$

dove con x indichiamo l'insieme delle tre coordinate proiettive omogenee di un punto. È ben noto che, a meno di sostituzioni lineari, le funzioni x si possono definire mediante un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\begin{aligned} x_{uu} &= -bx_u + \beta x_v + px \\ x_{uv} &= ax_u + bx_v + cx \\ x_{vv} &= \gamma x_u - ax_v + qx , \end{aligned} \tag{2}$$

dove le funzioni a, b, β, γ soddisfano alle condizioni di integrabilità

$$\begin{aligned} a_{uu} + 2b_{uv} + 3b(a_u + 2b_v) + 3(a\beta)_v &= \beta_{vv} + 2\beta\gamma_u + \beta_u\gamma \\ b_{vv} + 2a_{uv} + 3a(2a_u + b_v) + 3(b\gamma)_u &= \gamma_{uu} + 2\gamma\beta_v + \gamma_v\beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Le (2), a meno di omografie, rappresentano dunque un tritessuto di 2ª specie, quando si convenga che la schiera doppia sia, ad es., quella costituita dalle curve $v = \text{cost.}$. Ho dimostrato che:

I tritessuti di 2ª specie che ammettono ∞^1 *deformazioni proiettive sono tutti e soli quelli rappresentati dalle equazioni* (1) *per cui* $\beta = 1$, $2a_u + b_v = 0$, *ed i loro deformati proiettivi.*

Da una rapida ispezione delle condizioni anzidette e delle (3) segue:

I tritessuti di 2ª specie che sono proiettivamente deformabili in ∞^1 *modi dipendono da cinque funzioni arbitrarie di una variabile.*

5. Deformazione proiettiva di una trasformazione puntuale di 2ª specie.

Consideriamo due trasformazioni T, $\overline{T}$ rispettivamente fra le coppie di piani π, π' e $\overline{\pi}$, $\overline{\pi}'$ e supponiamo che sia posta fra le due trasformazioni una corrispondenza γ consistente in una trasformazione U fra π, $\overline{\pi}$ e una trasformazione U' fra π', $\overline{\pi}'$. Si dice che γ è una *deformazione proiettiva* di T, $\overline{T}$ se le curve caratteristiche di T, $\overline{T}$ sono caratteristiche anche per U, U'. Si dice poi che γ è una *deformazione proiettiva forte* di T, $\overline{T}$ se U, U' sono trasformazioni di 2ª specie e se le curve caratteristiche doppie (semplici) di T, $\overline{T}$ sono anche le curve caratteristiche doppie (semplici) di U, U' [6].

[6] Si vedano: M. VILLA ed F. SPERANZA, lavori cit. nella nota [2]. In questi lavori viene definito anche un altro tipo di applicabilità, detta inversa, che non viene però esaminata in questo lavoro.

Nel seguito ci occuperemo quasi esclusivamente della deformazione proiettiva forte. Nel n. 7 faremo un'osservazione relativa ai due tipi di deformazione.

Osserviamo subito che per deformare proiettivamente in modo forte una trasformazione T di 2ª specie, quand'è possibile, basta considerare due deformazioni proiettive U, U' dei tritessuti caratteristici Δ, Δ' di T. La trasformazione $\overline{T}$ prodotto di $U \cdot T \cdot U'$ è una deformata proiettiva di T e la corrissondenza γ fra T, $\overline{T}$ individuata da U, U' è un'applicabilità proiettiva di T, $\overline{T}$.

I risultati ricordati nei nn. precedenti ci permettono di affermare:

Una generica trasformazione puntuale di 2ª *specie è proiettivamente indeformabile in modo forte. Esistono tuttavia classi di trasformazioni di* 2ª *specie proiettivamente deformabili in modo forte.*

Infatti esistono tritessuti di 2ª specie che sono proiettivamente deformabili in un sol modo. Ovviamente le deformazioni proiettive di tali tritessuti sono trasformazioni di 2ª specie proiettivamente indeformabili. Ci sono d'altra parte tritessuti di 2ª specie deformabili in infiniti modi e quindi esistono trasformazioni puntuali di 2ª specie che ammettono infinite deformazioni proiettive forti.

Si pone quindi il problema di determinare le trasformazioni proiettivamente deformabili in modo forte o per lo meno quelle che ammettono infinite deformazioni proiettive forti.

6. Le trasformazioni puntuali di 2ª specie che ammettono infinite deformazioni proiettive forti.

Poichè i tritessuti di 2ª specie proiettivamente deformabili in infiniti modi, ammettono infinite deformazioni dipendenti o da una funzione arbitraria di una variabile o da una costante arbitraria, si ha:

Se una trasformazione puntuale di 2ª *specie possiede infinite deformazioni proiettive forti, queste infinite deformazioni dipendono o da due funzioni arbitrarie di una variabile, o da due costanti arbitrarie.*

Ed inoltre:

Le trasformazioni puntuali di 2ª *specie che ammettono infinite deformazioni proiettive forti dipendenti da due funzioni arbitrarie di una variabile sono tutte e sole quelle i cui tritessuti caratteristici sono del* I) *o* II) *tipo caratterizzati nel n.* 3.

Queste trasformazioni dipendono da quattro funzioni arbitrarie di una variabile.

Infine:

Le trasformazioni puntuali di 2ª *specie che posseggono infinite deformazioni proiettive forti dipendenti da due costanti arbitrarie* *sono tutte e sole quelle i cui tritessuti caratteristici sono del tipo determinato nel n.* 4

Tali trasformazioni dipendono da cinque funzioni arbitrarie di un argomento.

7. Un'osservazione sui due tipi di deformazione proiettiva di due trasformazioni di 2ª specie.

Nei nn. precedenti ci siamo occupati esclusivamente della deformazione proiettiva forte di due trasformazioni di 2ª specie. Evidentemente questioni analoghe possono porsi per l'altro tipo di deformazione proiettiva. Così, ad es., ci si può chiedere se ogni trasformazione di 2ª specie sia proiettivamente deformabile ed, in caso negativo, quali siano le trasformazioni proiettivamente deformabili. Ci si può anche domandare: *Se una trasformazione T è proiettivamente deformabile essa è di conseguenza deformabile in modo forte?*

La risposta a tale domanda è negativa [7]. Ciò si può provare costruendo esempi di trasformazioni che sono proiettivamente deformabili, *ma non sono deformabili in modo forte.* Tali esempi si possono costruire partendo da tritessuti deformabili in un solo modo, quali sono, ad es., quelli segnalati alla fine del n. 3.

Così i tritessuti di equazioni (1) dove

$$\beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad a = f(u), \quad b = \varphi(u)$$

e dove f e φ soddisfano alle equazioni

$$f'' + 3\varphi f' = 0$$
$$2ff' + \varphi' = 0,$$

sono deformabili in un sol modo. Pertanto le trasformazioni T che li deformano sono proiettivamente indeformabili in modo forte.

Le trasformazioni T ammettono invece infinite deformazioni proiettive (non forti). Sono tali le trasformazioni ottenute deformando i tritessuti rappresentanti dalle (1) nelle quali

$$\beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad b = 0, \quad a = \text{cost.}$$

[7] Mi sono posto questo quesito anche perchè sono state segnalate [Si veda: F. SPERANZA, op. cit. nella [2]] classi di trasformazioni per le quali la risposta al quesito precedente è positiva, mentre non si conoscevano esempi in cui si verificasse il fatto opposto.