BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BIANCA RAGGI

Sull'instabilità dei modi TEM in un cavo multipolare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 301–307.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_301_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Sull'instabilità dei modi TEM in un cavo multipolare.

Nota di BIANCA RAGGI (a Faenza)

Sunto. - *Si dimostra come una lieve eterogeneità nel mezzo che riempe un cavo bipolare scinde il modo TEM, in due modi che si propagano con velocità diversa.*

Summary. - *It is shown that a slight inhomogeneity of the dielectric filling a bipolar cable breaks the TEM mode in two modes that propagate with different speed.*

1. È noto come, in alcune guide d'onda, limitate da conduttori perfetti, possono propagarsi due o più modi di uguale velocità, ma con diversa struttura del campo elettromagnetico, però questi modi sono di solito instabili: basta infatti una piccola deformazione nella sezione della guida ([1]), o l'imperfetta conduttività delle pareti ([2]), o una lieve eterogeneità del dielettrico nella guida stessa ([3]), perchè i modi si propaghino con velocità tra loro diverse.

In questa nota, metterò in evidenza un caso di instabilità, forse un pò differente da quelli sopraccennati.

Consideriamo un cavo multiplo, come per esempio, un cavo bipolare schermato, cioè il sistema formato da due conduttori cilindrici posti nell'interno di un conduttore cavo pure cilindrico, gli assi dei conduttori ovviamente paralleli. Se i conduttori sono perfetti ed il dielettrico interposto fra essi è omogeneo, è noto che nel cavo si può propagare un modo TEM con la stessa velocità delle onde libere in un mezzo identico a quello tra i conduttori. Ma se il dielettrico è lievemente eterogeneo, dimostrerò in questa nota, che il modo TEM si spezza, in generale, in due, con

([1]) Cfr. L. DE BROGLIE, *La propagation guidée des ondes électromagnetiques*, Paris, 1941, pag. 30.

([2]) R. MÜLLER, *Über Stabilität und Dampfung von Rohrwellen elektrischen und magnetischen types gleichergrenzfrequenzen*, Zeits. für naturforschung IV 1949, pag. 218.

([3]) M. DE SOCIO, *Sulla propagazione nelle guide con dielettrico eterogeneo*, « Rivista di Matematica dell'Univ. di Parma », VII 1954, pag. 183.

velocità tra loro diverse, però indipendenti dalla frequenza ([4]), cioè, in altre parole, la lieve eterogeneità porta all'esistenza di due modi prossimi al modo TEM, ma a nessuna frequenza critica, come nel caso del cavo ordinario ([5]).

2. Come si è detto nell'introduzione, consideriamo un cavo bipolare schermato. Indichiamo con a, b, c rispettivamente i conduttori interni ed il conduttore che li circonda e riferiamo i punti dello spazio ad una terna ortogonale 0, x, y, z, con l'asse z parallelo al cavo. Il campo $\boldsymbol{E}_0$ ed $\boldsymbol{H}_0$ del modo TEM, che si può propagare nel cavo se riempito da un dielettrico omogeneo, si esprime nel seguente modo ([6]).

Siano: ψ_1 e ψ_2 due funzioni di x e di y armoniche, la prima uguale a uno su a, nulla su b e c, la seconda uguale a uno su b, nulla su a e c, ω la pulsazione del campo, supposto, ovviamente, sinoidale, ε_0 e μ la costante dielettrica e la permeabilità del mezzo nel cavo. Si ha allora:

$$\boldsymbol{E}_0 = - e^{-i\omega\alpha z} \operatorname{grad} \left(c_1\psi_1 + c_2\psi_2\right) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}\, \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{E}_0 \tag{1'}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie, $\alpha = \sqrt{\varepsilon_0\mu}$ è l'inverso della velocità di propagazione del modo e $\boldsymbol{k}$ il versore parallelo all'asse z. Supponiamo ora che il cavo sia riempito da un dielettrico lievemente eterogeneo, in modo che la costante dielettrica si possa scrivere:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$$

dove ε_0 è ovviamente costante, ma ε' è funzione solo di x e di y

([4]) Naturalmente i due modi non sono rigorosamente TEM, ma il campo elettromagnetico dei modi ha componenti longitudinali, per quanto molto piccole, conforme ad un risultato di CAPRIOLI: cfr. L. CAPRIOLI, *Onde elettromagnetiche di tipo trasversale nelle guide rettilinee con dielettrico eterogeneo*, « Atti IV Congresso Unione Matem. Italiana », 1951, pag. 478.

([5]) L. CAPRIOLI, *Sul comportamento dei modi TEM nei cavi coassiali in presenza di lieve eterogeneità nel dielettrico*, « Rendiconti Sem. Mat. Università Padova », XXII 1953, pag. 354.

([6]) Cfr. p. e. D. GRAFFI, *Lezioni di onde elettromagnetiche*, Ist. Superiore Poste e Telecomunicazioni, Roma, pag. 173.

e così piccolo, da poterlo considerare, nei calcoli, come infinitesimo, assieme alle sue derivate prime. Supporremo la permeabilità del mezzo ancora uguale a μ, ipotesi questa, in pratica, affatto restrittiva. Potremo perciò ammettere l'esistenza di modi di propagazione prossimi a quelli rappresentati da (1) e (1'). Quindi, detto $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ il campo elettrico e magnetico di uno di essi, si ha:

$$(2) \qquad \boldsymbol{E} = -e^{-i\omega(\alpha+\alpha')z}(c_1 \operatorname{grad}\psi_1 + c_2 \operatorname{grad}\psi_2) + \boldsymbol{E}' = e^{-i\omega\alpha' z}\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$$

$$(2') \qquad \boldsymbol{H} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}\, e^{-i\omega(\alpha+\alpha')z}\, \boldsymbol{k} \wedge (c_1 \operatorname{grad}\psi_1 + c_2 \operatorname{grad}\psi_2) + $$
$$+ \boldsymbol{H}' = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}\, e^{-i\omega\alpha' z}\, \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{H}'$$

dove $\boldsymbol{E}'$ ed $\boldsymbol{H}'$ sono vettori, α' una costante, vettori e costante da trattarsi come infinitesimi. $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ devono soddisfare le equazioni di MAXWELL, sicchè, trascurando il prodotto $\varepsilon'\boldsymbol{E}'$, perchè da considerarsi come infinitesimo di ordine superiore, si ottiene:

$$(3) \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \varepsilon_0 i\omega \boldsymbol{E} + i\omega\varepsilon'\boldsymbol{E}_0 \quad , \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu i\omega \boldsymbol{H}$$

Poniamo per semplicità:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= -e^{-i\omega\alpha z}\operatorname{grad}\psi_1 \quad , \quad \boldsymbol{h}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}\, \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 &= -e^{-i\omega\alpha z}\operatorname{grad}\psi_2 \quad , \quad \boldsymbol{h}_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}\, \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{h}_1$ come del resto $\boldsymbol{e}_2$ ed $\boldsymbol{h}_2$ soddisfano le equazioni di MAXWELL con $\varepsilon = \varepsilon_0$. Cambiando in queste equazioni i in $-i$, e indicando con $\boldsymbol{e}_1^*$ ed $\boldsymbol{h}_1^*$ i coniugati di $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{h}_1$, si ha:

$$(5) \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{h}_1^* = -\varepsilon_0 i\omega \boldsymbol{e}_1^* \quad , \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{e}_1^* = \mu i\omega \boldsymbol{h}_1^* .$$

Dalle (3), (4) e (5) si deduce facilmente la relazione che esprime il teorema di reciprocità:

$$(6) \qquad \operatorname{div}(\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{h}_1^* + \boldsymbol{e}_1^* \wedge \boldsymbol{H}) = -\varepsilon' i\omega \boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{e}_1^* .$$

Integrando la (6) su una sezione S del cavo, si ha:

$$\int_S \operatorname{div}\,(\boldsymbol{E}\wedge \boldsymbol{h}_1^* + \boldsymbol{e}_1^* \wedge \boldsymbol{H})dS =$$

$$= \int_S \frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{E}\wedge \boldsymbol{h}_1^* + \boldsymbol{e}_1^* \wedge \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{k}dS = -\int_S \varepsilon' i\omega \boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{e}_1^* dS \text{ (}^7\text{)}$$

ossia:

$$\alpha' \int_S (\boldsymbol{E}\wedge \boldsymbol{h}_1^* + \boldsymbol{e}_1^* \wedge \boldsymbol{H}) \times \boldsymbol{k}dS = \int_S \varepsilon' \boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{e}_1^* dS. \tag{7}$$

Ricordando le espressioni (2) e (2') di $\boldsymbol{E}$ e di $\boldsymbol{H}$, tenendo presente le (1), (1') e le (4) e trascurando, per quanto si è detto, i prodotti tra α', $\boldsymbol{E}'$ ed $\boldsymbol{H}'$, con semplici passaggi, si ottiene da (7):

$$c_1 \left[\int_S \varepsilon' \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1^* dS - \alpha' \int (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{h}_1^* + \boldsymbol{e}_1^* \wedge \boldsymbol{h}_1) \times \boldsymbol{k}dS \right] + \tag{8}$$

$$+ c_2 \left[\int_S \varepsilon' \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1^* dS - \alpha' \int_S (\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{h}_1^* + \boldsymbol{e}_1^* \wedge \boldsymbol{h}_2) \times \boldsymbol{k}dS \right] = 0.$$

Ora dalle (4) si ha, ricordando che le ψ sono reali:

$$\int_S \varepsilon' \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_s^* dS = \int_S \varepsilon' \operatorname{grad} \psi_r \times \operatorname{grad} \psi_s dS \qquad (r,\ s = 1,\ 2) \tag{9}$$

$$\int_S (\boldsymbol{e}_s \wedge \boldsymbol{h}_r^* + \boldsymbol{e}_r^* \wedge \boldsymbol{h}_s) \times \boldsymbol{k}\, dS = \tag{10}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} \int_S [\boldsymbol{e}_s \wedge (\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{e}_r^*) \times \boldsymbol{k} + \boldsymbol{e}_r^* \wedge (\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{e}_s) \times \boldsymbol{k}]\, dS =$$

(7) Infatti, posto $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{h}_1^* + \boldsymbol{e}_1^* \wedge \boldsymbol{H}$, essendo $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{e}_1$ perpendicolari ai conduttori (perfetti) che limitano il cavo, si ha sulle linee s che limitano la sezione S, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n} = 0$, dove $\boldsymbol{n}$ è il versore normale a quelle linee, per cui:

$$\int_S \operatorname{div} \boldsymbol{u} dS = \int_S \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) dS + \int_S \frac{\partial u_z}{\partial z} dS = \int_s (u_x \boldsymbol{i} + u_y \boldsymbol{j}) \times \boldsymbol{n} ds +$$

$$+ \int_S \frac{\partial u_z}{\partial z} dS = \frac{\partial}{\partial z} \int_S \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{k} dS.$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} \int_S [(k \wedge e_s) \times (k \wedge e_r^*) + (k \wedge e_r^*) \times (k \wedge e_s)] dS =$$

$$= 2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} \int_S e_r^* \times e_s \, dS = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} \int_S \operatorname{grad} \psi_r \times \operatorname{grad} \psi_s \, dS \qquad (r,\ s = 1,\ 2).$$

E, posto per semplicità:

$$\int_S \varepsilon' \operatorname{grad} \psi_r \times \operatorname{grad} \psi_s \, dS = a_{rs} ,$$

$$2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} \int_S \operatorname{grad} \psi_r \times \operatorname{grad} \psi_s \, dS = b_{rs} \qquad (r,\ s = 1,\ 2)$$

e tenendo presente che $a_{rs} = a_{sr}$, $b_{rs} = b_{sr}$, la (8) diventa:

$$c_1(a_{11} - \alpha' b_{11}) + c_2(a_{12} - \alpha' b_{12}) = 0 \tag{11}$$

e con gli stessi passaggi, sostituendo a e_1 e ad h_1, e_2 ed h_2, si ottiene:

$$c_1(a_{21} - \alpha' b_{21}) + c_2(a_{22} - \alpha' b_{22}) = 0. \tag{12}$$

Le costanti c_1 e c_2 devono quindi soddisfare ad un sistema omogeneo di due equazioni (11) e (12) in due incognite ed affinchè il sistema ammetta soluzioni non nulle, deve essere nullo il determinante dei coefficienti, cioè:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \alpha' b_{11} & a_{12} - \alpha' b_{12} \\ a_{21} - \alpha' b_{21} & a_{22} - \alpha' b_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

e sviluppando questo determinante si ha:

$$(b_{11} b_{22} - b_{12}^2)\alpha'^2 - (a_{11} b_{22} - 2a_{12} b_{12} + a_{22} b_{11})\alpha' + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) = 0. \tag{14}$$

La (14) è una equazione di secondo grado con coefficienti indipendenti da ω, che determina due valori reali [8] in generale

[8] Ciò per un teorema ben noto: cfr. I. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Meccanica razionale*, Bologna (1926) vol. II, pag. 453.

distinti per α' e indipendenti dalla frequenza; ciò significa che per effetto della eterogeneità, si hanno, in generale, nel cavo due modi prossimi ai modi TEM che si propagano per qualunque frequenza, ma con velocità (che valgono le inverse di $\alpha + \alpha'$) diverse. In altre parole, nel caso da noi considerato, l'eterogeneità del dielettrico produce uno sdoppiamento nei modi prossimi al modo TEM, senza però introdurre frequenze critiche. Si noti poi che dalle (11) e (12). il rapporto fra c_1 e c_2 risulta reale e quindi, con opportuna scelta dell'origine dei tempi, le c_1 e c_2 di ognuno dei due modi, possono ridursi a costanti reali.

3. È opportuno studiare l'equazione di secondo grado (14). Intanto osserviamo che b_{11}, b_{22}, b_{12} non sono altro che i coefficienti di capacità proprie dei conduttori a e b e il coefficiente di capacità mutua tra a e b, qualora il dielettrico avesse costante dielettrica $2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}$. Per cose note, $b_{11}>0$, $b_{22}>0$, $b_{12}<0$ e $b_{12}^2<b_{11}b_{22}$ (9), per cui il coefficiente del termine di secondo grado in (14) è positivo.

Calcoliamo il discriminante di (14). Si ha, dopo semplici calcoli:

$$\Delta = (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})^2 + 4(a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22})(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11}). \tag{15}$$

La (15) si annulla quando le b_{rs} sono proporzionali alle a_{rs}, come avviene, per esempio, se ε' è costante e nel cavo si propaga ancora un sol modo.

È però facile dare un esempio, per cui risulta $\Delta \neq 0$ e si propagano due modi diversi. Consideriamo un cavo, la cui sezione S col piano $z = 0$ supporremo formata da due cerchi a e b di raggio uguale, sezioni dei conduttori dello stesso nome, con i centri sull'asse x e simmetrici rispetto all'asse y, circondati da un cerchio c, sezione del conduttore c, con il centro nell'origine. Ovviamente, S è simmetrica rispetto all'asse y. Per la simmetria delle condizioni al contorno, deve essere:

$$\psi_1(x, y) = \psi_2(-x, y) \quad , \quad \psi_1(-x, y) = \psi_2(x, y) \tag{16}$$

Sia inoltre:

$$\varepsilon'(x, y) = -\varepsilon'(-x, y) \tag{17}$$

(9) Cfr.: JEANS *Electricity and Magnetism*, Cambridge, 1925, pag. 96.

si ha subito:

$$a_{12} = 0 \quad , \quad a_{11} = -a_{22} \quad , \quad b_{11} = b_{22} . \tag{18}$$

Dimostriamo l'ultima delle (18). Si ha, tenuto presente le (16):

$$b_{11} = \int_S \operatorname{grad}^2 \psi_1(x,y)dS = \int_S \operatorname{grad}^2 \psi_2(-x,y)dS = \int_S \operatorname{grad}^2 \psi_2(x,y)dS = b_{22} \text{ (10)}.$$

In modo analogo, per la emisimmetria di $\varepsilon'(x, y)$, si provano le altre due di (18).

Per le (18), la (15) diventa:

$$\Delta = 4b_{11}^2 a_{11}^2 - 4b_{12}^2 a_{11}^2 = 4(b_{11}^2 - b_{12}^2)a_{11}^2 . \tag{19}$$

Poiché, come si è già detto, è $b_{11}^2 - b_{12}^2 > 0$, affinchè sia Δ positivo, da (19) si deduce che deve essere $a_{11} \neq 0$, condizione questa, a cui si può facilmente soddisfare. Infatti, ricordando che ε' è arbitrario, salvo la sua semisimmetria rispetto all'asse x, affinché fosse in ogni caso $a_{11} = 0$, dovrebbe essere:

$$|\operatorname{grad} \psi_1(x, y)| = |\operatorname{grad} \psi_1(-x, y)| .$$

Da ciò si avrebbe che se il conduttore a fosse a potenziale uno e il conduttore b a potenziale zero, la densità di carica nei punti di b sarebbe uguale e di segno contrario, (perchè su b il potenziale è minimo) alla densità di carica nei punti simmetrici di a, cioè la carica di a sarebbe uguale e contraria a quella di b, di conseguenza quella di c sarebbe nulla, relazione assurda, perchè la funzione armonica e non identicamente nulla ψ_1, sarebbe nulla su c assieme alla sua derivata normale [11].

Potendo essere perciò $\Delta > 0$, l'equazione (14) ha due radici reali e distinte e, come abbiamo affermato, a causa della eterogeneità del dielettrico, si hanno due modi lievemente ibridi che si propagano con velocità diverse.

[10] Infatti:

$$\operatorname{grad}^2 \psi_2(-x,y) = \left(\frac{\partial\psi_2(-x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_2(-x,y)}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi_2(-x,y)}{\partial(-x)}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_2(-x,y)}{\partial y}\right)^2$$

cambiando x in $-x$ e tenendo conto della simmetria di S, si ha la relazione del testo.

[11] Si tenga presente che in ogni punto di c, $\dfrac{\partial\psi_1}{\partial n}$ ha lo stesso segno.