Bollettino Unione Matematica Italiana

Mauro Picone

Sulle maggioranti i numeri caratteristici di una matrice quadrata.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 335–340.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_335_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Sulle maggioranti i numeri caratteristici di una matrice quadrata.

Nota (*) di MAURO PICONE (a Roma)

Sunto. - *Vista l'importanza che ha, per il calcolo della soluzione di un sistema di equazioni lineari algebriche, il possesso di funzioni maggioranti i numeri caratteristici di una matrice quadrata, tanto più vantaggiose quanto più forti, si indicano parecchie di tali funzioni, una delle quali è più forte di quelle classiche di* FROBENIUS.

Summary. - *A knowledge of bounds, the more strict the more useful, for the characteristic values of square matrices, is of great importance in the computation of the solutions of systems of linear algebraic equations. Many of them are considered in the present paper, one of which improves classical bounds given by* FROBENIUS.

Per una matrice quadrata a, d'ordine n ad elementi a_{ij} reali o complessi, ben si conoscono funzioni $\varphi(a)$ della matrice, reali e non negative, fornenti una maggiorazione dei numeri caratteristici della matrice stessa, per le quali, cioè, per ogni numero caratteristico μ della matrice, si ha

$$|\mu| \leqq \varphi(a).$$

Di due funzioni $\varphi_1(a)$ e $\varphi_2(a)$ entrambe maggioranti i numeri caratteristici della a, dirò che la prima *fornisce una maggiorazione più ristretta di quella data* dalla seconda o che è una *maggiorante più forte* della seconda, se è sempre, per qualsivoglia matrice a,

$$\varphi_1(a) \leqq \varphi_2(a), \tag{1}$$

ed esistono matrici per le quali in questa relazione vale il segno minore.

È utile, in pratica, il possesso di parecchie di tali funzioni maggioranti, per scegliere, fra queste, caso per caso, quella che ha il minimo valore (1). Sono classiche le funzioni maggioranti

(*) Redatta all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo (INAC).

(1) Cfr., per esempio, la mia nota: *L'automazione del calcolo e il progresso dell'Analisi matematica* (La Ricerca Scientifica, febbraio 1958) dove, a pag. 713, dalla conoscenza di tali funzioni si deduce la costruzione di domini, dello spazio a n dimensioni, contenenti il punto soluzione di un sistema di n equazioni lineari algebriche in n incognite, e i diametri di tali domini riescono, vantaggiosamente, tanto più piccoli, quanto minore

di FROBENIUS

$$(1)\quad |a| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2},\ |a|_d = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,\ |a|_s = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

chiamate, nella citata mia nota [loc. cit. (1)] *moduli della matrice*, rispettivamente, *euclideo*, a *destra*, a *sinistra*. Indicando con a' la matrice trasposta della a, risulta

$$|a|_s = |a'|_d,\quad |a|_d = |a'|_s.$$

Si vede che nessuna di queste maggioranti è più forte di una qualsivoglia fra esse. Se, per esempio, a è del terz'ordine e

$$(3)\qquad |a_{ij}| \begin{cases} = \beta, & \text{per } (i, j) = (3, 3), \\ = \alpha, & \text{per } (i, j) \neq (3, 3), \end{cases}$$

risulta, per $\alpha \neq \beta$,

$$|a| < |a|_d = |a|,$$

e la differenza $|a|_d - |a|$ diverge positivamente al divergere di $|\alpha - \beta|$. Se

$$|a_{ij}| \begin{cases} = \beta, & \text{per } (i, j) = (3, 3) \text{ e } (i, j) = (2, 3), \\ = \alpha, & \text{per ogni altra coppia } (i, j), \end{cases}$$

risulta, per $\beta > 3\alpha$,

$$|a| > |a|_d$$

e la differenza $|a| - |a|_d$ diverge positivamente al divergere di $\beta - 3\alpha$. Per $\beta > \alpha$, si ha

$$|a| < |a|_s,$$

e la differenza $|a|_s - |a|$ diverge positivamente al divergere di $\beta - \alpha$. Ecc.

Nuove funzioni maggioranti, dipendenti da un parametro reale α, non inferiore a uno, sono indicate nella mia citata nota [loc. cit. (1)]. Esse sono date dai, così colà chiamati, *moduli complementari d'indice* α della matrice a e, designati coi simboli $|a|_*^{(\sigma)}$, $|a'|_*^{(\alpha)}$, così definiti, per $\alpha > 1$,

$$(4)\quad |a|_*^{(\alpha)} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^{\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \right\}^{\frac{1}{\sigma}},\quad |a'|_*^{(\alpha)} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|^{\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \right\}^{\frac{1}{\sigma}},$$

è il valore della maggiorante impiegata.

Si ricordi, inoltre, che la rapidità della convergenza del metodo iterativo di VON MISES-POLLACZEK [ZAMM (1929)], per il calcolo della soluzione di un tale sistema, aumenta con la diminuzione della maggiorante i numeri caratteristici della matrice dei coefficienti del sistema, supposto normale, adoperata nel metodo stesso.

ove

$$\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$

mentre i *moduli d'indice* α della matrice stessa, designati coi simboli $|a|^{(\alpha)}$, $|a'|^{(\alpha)}$, sono così definiti:

$$(5) \qquad |a|^{(\alpha)} = |a'|^{(\alpha)} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^{\alpha} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Si ha:

$$(6) \quad |a|_*^{(\infty)} = \lim_{\alpha \to \infty} |a|_*^{(\alpha)} = |a|_d, \qquad |a'|_*^{(\infty)} = \lim_{\alpha \to \infty} |a'|_*^{(\alpha)} = |a|_s,$$

$$(7) \qquad |a|_*^{(1)} = \lim_{\alpha \to 1} |a|_*^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n} \max_j |a_{ij}| \geqq |a|_s,$$

$$(8) \qquad |a'|_*^{(1)} = \lim_{\alpha \to 1} |a'|_*^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{n} \max_j |a_{ji}| \geqq |a|_d.$$

I *moduli complementari minimi* della matrice a, essi pure maggioranti i numeri caratteristici della a, designati coi simboli $|a|_*$, $|a'|_*$, sono così definiti:

$$(9) \qquad |a|_* = \min_{1 \leqq \alpha \leqq \infty} |a|_*^{(\alpha)}, \qquad |a'|_* = \min_{1 < \alpha \leqq \infty} |a'|_*^{(\alpha)}.$$

Laddove, il *modulo minimo* della matrice a è dato da

$$(10) \quad |a|^{(\infty)} = |a'|^{(\infty)} = \lim_{\alpha \to \infty} |a|^{(\alpha)} = \lim_{\alpha \to \infty} |a'|^{(\alpha)} = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Sussiste il teorema:

I. *La funzione* $\varphi(a)$ *così definita*:

$$(11) \qquad \varphi(a) = \min(|a|_*, |a'|_*),$$

è una maggiorante i numeri caratteristici della a, *più forte di quelle di Frobenius.*

Infatti, con le (6), si ha:

$$|a|^{(2)} = |a'|^{(2)} = |a|,$$

e quindi

$$(12) \qquad \varphi(a) \leqq |a|, \qquad \varphi(a) \leqq |a|_s, \qquad \varphi(a) \leqq |a|_d,$$

mentre che, per esempio, per la matrice

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

in tutte le (12) vale il segno minore.

Una funzione maggiorante di facile calcolo è data dal, così chiamato, nella citata mia nota, *modulo diagonale* della matrice, designato col simbolo $|a|_\delta$ e così definito:

$$(13) \qquad |a|_\delta = |a'|_\delta = \max_i |a_{ii}| + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{1,n} |a_{ij}|.$$

Se μ è un numero caratteristico di a e x un vettore non nullo per cui riesca $ax = \mu x$, si ha (cfr. loc. cit. [1]), p. 709)

$$(14) \quad |\mu|\,|x|^2 = |\bar{x}ax| \leqq \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|\,|x_i|^2 + \sum_{i \neq j}^{1,n} |a_{ij}|\,|x_i|\,|x_j| \leqq$$

$$\leqq \max_i |a_{ii}|\,|x|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{1,n} |a_{ij}|\,(|x_i|^2 + |x_j|^2) \leqq |a|_\delta |x|^2,$$

donde $|\mu| \leqq |a|_\delta$, per la non nullità di x.

In taluni casi $|a|_\delta$ è minore delle maggioranti di Frobenius. Per esempio, per la matrice a del terz'ordine con gli elementi dati dalle (3), si ha:

$$|a|_\delta < |a|, \qquad |a|_\delta < |a|_d, \qquad |a|_\delta < |a|_s,$$

per $\beta > 17\alpha$ e le differenze $|a| - |a|_\delta$, $|a|_d - |a|_\delta$, $|a|_s - |a|_\delta$, divergono positivamente al divergere di $\beta - 17\alpha$.

Si noti che dalla (14) segue il teorema:

II. *Detta* b(a) *la matrice simmetrica per la quale*

$$b(a)_{ij} = \frac{1}{2}(|a_{ij}| + |a_{ji}|),$$

ogni funzione ψ[b(a)], *maggiorante i numeri caratteristici della* b(a), *lo è anche quelli della* a.

Detti, invero, μ un numero caratteristico della a e x un vettore non nullo, per cui si abbia $ax = \mu x$, risulta:

$$\mu |x|^2 = |\bar{x}ax| \leqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_i|\,|x_j| =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b(a)_{ij} |x_i|\,|x_j| \leqq \psi[b(a)]\,|x|^2.$$

È dunque funzione maggiorante i numeri caratteristici di a:

$$(15) \qquad |b(a)|_s = |b(a)|_d = \max_i \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{ij}| + |a_{ji}|}{2},$$

segnalatami da Wolf Gross, mio collaboratore all'INAC.

Questa maggiorante è più forte, come subito si vede, della $|a|_\delta$.

Così pure la funzione

$$|\, b(a) \,|, \tag{16}$$

è maggiorante i numeri caratteristici di a, ed è più forte della $|\, a \,|$. Subito si dimostra, infatti, che

$$|\, b(a) \,| \leqq |\, a \,|,$$

ed il segno di eguaglianza sussiste solo quando si abbia $|\, a_{ij} \,| = |\, a_{ji} \,|$, per ogni coppia $(i,\, j)$.

WOLF GROSS ha recentemente dato [2] il bel teorema:

III. *Se* f(a) *è una funzione non negativa e continua della matrice quadrata* a, *positivamente omogenea del prim' ordine e nulla solo quando* a *è nulla, detti* ρ(a) *il modulo massimo dei numeri caratteristici di* a *ed* r *un numero naturale, risulta*

$$\lim_{r \to \infty} f(a^r)^{1/r} = \rho(a).$$

C avviene dunque per ciascuna delle funzione (2), (4), (5), (6), (7), (9), (10), (11), (13), (14) e (16).

Se $\varphi(a)$ è una funzione di a, maggiorante i numeri caratteristici della matrice quadrata a, lo è pure, com'è ben noto, $\varphi(a^r)^{1/r}$ e se $\varphi(a)$ verifica le ipotesi del teor. III, poichè allora risulta

$$\lim_{r \to \infty} \varphi(a^r)^{1/r} = \rho(a), \tag{17}$$

possiamo enunciare il teorema:

IV. *Se* φ(a) *è una funzione maggiorante i numeri caratteristici della matrice quadrata* a, *verificante le ipotesi del teor III e, per una fissata matrice* a, *è* φ(a) > ρ(a) *esiste un numero naturale* r_a *tale che, per* $r > r_a$, *riesce*

$$\rho(a) \leqq \varphi(a^r)^{1/r} < \varphi(a$$

Designi $\varphi(a)$, per esempio, una delle funzioni (2), (4), (11), (13), (15) e (16), maggioranti i numeri caratteristici di a, la relazione di limite (17) fornisce un calcolo del massimo modulo $\rho(a)$ dei numeri caratteristici di a, approssimato per ecesso. Nella mia citata nota (loc. cit. [1]) è dimostrato (a pag. 711) che se la matrice a è normale, si ha pure, per il calcolo di $\rho(a)$, la relazione di limite

$$\lim_{r \to \infty} \frac{|\, a^{r+1} \,|}{|\, a^r \,|} = \rho(a) \tag{18}$$

[2]) WOLF GROSS, *Sul calcolo del massimo modulo delle radici dell' equazione caratteristica di una matrice.* Rend. Acc. Naz. dei Lincei, maggio 1958.

e se a è hermitiana, risulta, per ogni numero naturale r,

$$\frac{|a^{r+1}|}{|a^r|} \leqq \rho(a),$$

si ha dunque il teorema:

V. *Se la matrice* a *è hermitiana, per il calcolo del massimo modulo* $\rho(a)$ *dei suoi numeri caratteristici, fornito dalla* (17) *o dalla* (18), *la* $\varphi(a)$ *essendo una maggiorante verificante le ipotesi del teor. III, si possiede una maggiorazione dell'errore d'approssimazione.*

Rimane da ricercare tutte le matrici quadrate a e le funzioni $\psi(a)$ di esse, per cui riesca

$$\frac{\psi(a^{r+1})}{\psi(a^r)} \leqq \rho(a), \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{\psi(a^{r+1})}{\psi(a^r)} = \rho(a).$$

Notiamo, infine, il teorema seguente, la cui immediatezza mi è stata fatta osservare de WOLF GROSS.

VI. *Data una matrice qualsiasi* a, *si designi con* $c(a)$ *una matrice reale ad essa simile, per la quale si abbia*

$$c(a)_{ij} \geqq |a_{ij}|.$$

Se a *è quadrata, ogni funzione maggiorante i numeri caratteristici di* $c(a)$ *lo è anche quelli di* a.

Si ha, invero, comunque si assumano due matrici a, d'ordine (m, n) e b d'ordine (n, p),

$$|(ab)_{ij}| \leqq [c(a)c(b)]_{ij}$$

e quindi, per esempio,

$$|ab| \leqq |c(a)c(b)|,$$

donde, se a è quadrata e r un numero naturale,

$$|a^r|^{1/r} \leqq |c(a)^r|^{1/r},$$

e passando al limite per $r \to \infty$,

$$\rho(a) \leqq \rho[c(a)].$$

Questo teorema può essere, in pratica, utilizzato per ottenere numeri *certamente* non inferiori al massimo modulo $\rho(a)$ dei numeri caratteristici di una matrice a numericamente assegnata. Infatti, una matrice $c(a)$ ha tutti gli elementi reali e non negativi e pertanto, ordinando al calcolatore automatico di aumentare, nel calcolo di $c(a)^r$, di un'unità l'ultima cifra dei numeri che provengono dal troncamento di quelli dati dalle varie moltiplicazioni eseguite, si perverrà ad un valore v_r di $|c(a)^r|$ — o di una qualunque altra delle considerate funzioni maggioranti i numeri caratteristici di $c(a)^r$ — certamente approssimato per eccesso, donde, riuscirà, certamente, $v_r^{1/r} \geqq \rho[c(a)] \geqq \rho(a)$.