Enrico Bombieri

Sull'approssimazione di numeri algebrici mediante numeri algebrici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 351–354.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_351_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Sull'approssimazione di numeri algebrici mediante numeri algebrici.

Nota di ENRICO BOMBIERI (a Milano)

Sunto. - *Si dimostra una limitazione al disotto per lo scarto fra due numeri algebrici la quale è fornita da una espressione contenente simmetricamente le altezze* (1) *e i gradi dei numeri stessi.*

Summary. - *One proves that a lower bound for the modulus of the difference of two algebraic numbers is given by an expression containing simmetrically the height and the degrees of both numbers.*

1. È noto il seguente teorema di A. BRAUER (2):

« Se ξ_1 è algebrico di grado n_1 e ξ_2 è algebrico di grado n_2 allora per $\xi_1 \neq \xi_2$ vale la disuguaglianza

$$|\xi_1 - \xi_2| > (C(\xi_1))^n H^{-n_1},$$

dove H è l'altezza di ξ_2 e $C(\xi_1)$ dipende soltanto da ξ_1 ».

Vogliamo dimostrare qui, con un procedimento elementare, il seguente

TEOREMA. - *Siano* ξ_1 *e* ξ_2 *due numeri algebrici, di grado* n_1 *e* n_2 *e altezza* H_1 *e* H_2 *rispettivamente, fra loro non coniugati; allora*

$$|\xi_1 - \xi_2| > c_1(n_1, n_2) H_1^{-n_2} H_2^{-n_1}$$

dove $c_1(n_1, n_2) > 0$ *dipende soltanto dai gradi* n_1 *e* n_2.

Questo teorema non è un corollario del teorema di A. BRAUER.

I^a Osservazione: sviluppando esplicitamente le limitazioni per i numeri $c_1(n_1, n_2)$ che incontreremo si può ottenere:

$$c_1(n_1, n_2) > (4n_1 n_2)^{-3n_1 n_2}.$$

(1) Come *altezza* di un polinomio a coefficienti interi si intende il massimo dei moduli dei coefficienti del polinomio; come *altezza* di un numero algebrico si intende l'altezza dell'unica equazione irriducibile a coefficienti interi a cui soddisfa.

(2) A. BRAUER, Über die Approximation algebraischer Zahlen durch algebraische Zahlen, Jahresb. deutsch. Math. Ver. 38, (1929), 47.

IIª Osservazione: il procedimento dimostrativo porta ad ulteriori miglioramenti sotto certe condizioni. Ad esempio:
$\xi^{(r)}$ siano i coniugati di ξ_1; allora se $|\xi_1| \geq |\xi^{(r)}| \geq 1$, e ξ_1 è intero algebrico, e per ξ_1 e ξ_2 valgono le condizioni del teorema, allora

$$|\xi_1 - \xi_2| \geq c_1(n_1, n_2) H_1^{-n_2+1/n_1} H_2^{-n_1} \qquad \text{con } c_1(n_1, n_2) > (4n_1n_2)^{-3n_1n_2}$$

Inoltre, se $n_1 \leq n_2$ si può omettere la condizione che ξ_1 sia intero algebrico.

2. Lemmi preliminari.

LEMMA 1. - *Siano* $u_1, \ldots, u_n$ n *numeri reali o complessi. Allora esiste* k *intero razionale,* $|k| \leq n$, *tale che* $|u_r + k| \geq 1, r = 1, \ldots, n$ *contemporaneamente.*

È infatti evidente che, disponendo (se possibile) i $2n$ numeri $\pm |u'_r|$ nei $4n + 2$ intervalli $(m, m + 1)$, $m = -2n - 1, \ldots, 2n$ resteranno liberi almeno due intervalli consecutivi $(m_0 - 1, m_0 + 1)$ con $-2n \leq m_0 \leq 2n$. Ponendo allora $k = -m_0$ si avrà evidentemente $|\pm |u'_r| + k| \geq 1$. In particolare, se $(-1)^g$ è il segno di k, avremo anche: $|(-1^{g+1} |u'_r| + (-1)^g |k|| \geq 1$. Ma ora, per una nota disuguaglianza, $|k + u'_r| \geq ||k| - |u'_r|| = |(-1)^g |k| + (-1)^{g+1} |u'_r|| \geq 1$, con $|k| \leq 2n$; ponendo allora $u'_r = u_r - n$ il lemma 1 sarà dimostrato.

LEMMA 2. - *Se* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sono le radici dell'equazione* $a_0 x^n + \ldots + a_n = 0$ *a coefficienti interi, e* $P(x)$ *è un polinomio di grado* n_1 *a coefficienti interi, allora* $a_0^{n_1} P(\lambda_1) \ldots P(\lambda_n)$ *è un numero intero razionale.*

Infatti $P(\lambda_1) \ldots P(\lambda_n)$ è una funzione razionale simmetrica dei λ_s a coefficienti interi, e il massimo esponente dei λ_s è n_1; notando ora che se $S_r(\lambda)$ è la r-esima funzione razionale simmetrica fondamentale dei λ_s quindi $a_0 S_r(\lambda)$ è un numero intero razionale, si ha il lemma 2 per il teorema fondamentale sulle funzioni simmetriche (3).

LEMMA 3. - *Se* H *è l'altezza del polinomio* f(x) *di grado* n, *e* H' *è l'altezza di* f(x + k), *allora* $H' \leq Hc_2(n, |k|)$.

(3) O. NICOLETTI, *Funzioni razionali di una o più variabili,* in « Enciclopedia delle Matematiche elementari, Milano, Hoepli », vol. I° parte IIª, pag. 191, b) e c).

Infatti se $f(x)=\sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, b_\nu x^\nu$, si avrà:

$$f(x+k)=\sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, b_\nu \sum_{0}^{\nu}{}_{m}\binom{\nu}{m}x^m k^{\nu-m}=\sum_{0}^{n}{}_{m}\, x^m \sum_{\nu\geq m} b_\nu \binom{\nu}{m}k^{\nu-m}=\sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, b'_\nu x^\nu,$$

da cui $|b'_\nu|\leq c_2(n,\ |k|)\max_\nu |b_\nu|=Hc_2(n,\ |k|)$, e quindi si ha il lemma 3.

3. Dimostrazione del teorema. - Sia ora $P(x)$ un polinomio irriducibile di grado n_1 e altezza H'_1, con radici ξ', , λ_1 un numero algebrico di grado n_2, con altezza H_2, e $\lambda_2, \dots, \lambda_{n_2}$ i suoi coniugati; sia ancora a_0 il primo coefficiente dell'equazione $f(x)=0$ irriducibile a coefficienti interi a cui soddisfano i λ_s. Per il lemma 1 esisterà k intero, $|k|\leq n_2$ tale che $|\lambda_s+k|\geq 1$.

Sia allora $\lambda'_s=\lambda_s+k$ ed abbia l'altezza H'_2. Supponiamo poi che $P(\lambda'_s)\neq 0$.

Per il lemma 2 sarà:

$$|a_0^{n_1}P(\lambda'_1)\dots P(\lambda'_{n_2})|\geq 1.$$

Ma ora

$$|P(\lambda'_s)|\leq H'_1\sum_{0}^{n_1}{}_{\nu}|\lambda'_s|^\nu\leq(n_1+1)H'_1|\lambda'_s|^{n_1}$$

e poichè

$$|P(\lambda'_1)|\geq 1/(|a_0^{n_1}|\ |P(\lambda'_2)\dots P(\lambda'_{n_2})|)$$

si ottiene

$$|P(\lambda'_1)|\geq|a_0^{-n_1}|\,c_3(n_1,\ n_2)H'_1{}^{-(n_2-1)}|\lambda'_2\dots\lambda'_{n_2}|^{-n_1}.$$

Sia ora $P(\xi'_1)=0$. Si avrà, per la nota formula di Darboux, $P(\lambda'_1)=P(\lambda'_1)-P(\xi'_1)=\eta(\lambda'_1-\xi'_1)P'(\sigma)$, con σ sul segmento $\overline{\lambda'_1,\ \xi'_1}$ e con $|\eta|\leq 1$. Ma ora, se $|\lambda'_1-\xi'_1|\leq 1$, si avrà $|\xi'_1|\leq 1+|\lambda'_1|\leq$ $\leq 2|\lambda'_1|$; inoltre

$$|P'(\sigma)|\leq n_1 H'_1\sum_{0}^{n_1-1}{}_{\nu}|\sigma|^\nu\leq n_1{}^2H'_1\max(|\xi'_1|^{n_1},|\lambda'_1|^{n_1})\leq n_1{}^2 2^{n_1}H'_1|\lambda'_1|^{n_1},$$

Dalla limitazione inferiore per $|P(\lambda'_1)|$, dalla formula di Darboux e dalla limitazione superiore per $|P'(\sigma)|$ si ottiene infine:

$$|\xi'_1-\lambda'_1|\geq|a_0|^{-n_1}c_4(n_1,\ n_2)H'_1{}^{-n_2}|\lambda'_1\dots\lambda'_{n_2}|^{-n_1}.$$

Per il lemma 3, poichè il primo coefficiente dell'equazione irriducibile a coefficienti interi a cui soddisfano i λ'_s è a_0, avremo

$$|\lambda'_1 \dots \lambda'_{n_2}| \leq H'_2/|a_0| \leq c_2(n_2, |k|)H_2/|a_0|,$$

da cui, essendo $|k| \leq n_2$,

$$|\xi'_1 - k - \lambda_1| \leq c_5(n_1, n_2)H'_1{}^{-n_2}H_2{}^{-n_1}.$$

Se ora $\xi_1 = \xi'_1 - k$ ha come altezza H_1, per il lemma 3 sarà $H'_1 \leq H_1 c_2(n_1, k)$ e dunque essendo $|k| \leq n_2$, si ha

$$|\xi_1 - \lambda_1| \geq c_1(n_1, n_2)H_1{}^{-n_2}H_2{}^{-n_1};$$

poichè i nostri calcoli conducono a $c_1(n_1, n_2) < 1$ si può effettivamente supporre $|\xi'_1 - \lambda'_1| = |\xi_1 - \lambda_1| \leq 1$.

Rimane ora da togliere l'ipotesi restrittiva $P(\lambda'_s) \neq 0$. Osserviamo che $P(\xi'_1) = 0$; supponiamo che $P(\lambda'_s) = 0$. Poichè $P(x)$ è irriducibile per ipotesi, le radici di $P(x) = 0$, per un noto teorema, saranno tutti e soli i numeri λ'_s.

(Infatti i numeri λ'_s sono coniugati tra loro, e un numero algebrico soddisfa ad una sola equazione irriducibile a coefficienti interi.) Perciò sarà $\xi'_1 = \lambda'_{s_1}$ per un adatto s_1, cioè $\xi_1 = \lambda_{s_1}$, e ciò contraddice l'ipotesi fatta sui numeri ξ_1 e ξ_2 (infatti $\xi_2 = \lambda_1$). Il nostro teorema è così dimostrato.

Il teorema contenuto nella II^a osservazione al n. 1, si dimostra in base alle seguenti semplici osservazioni:

1°) nel lemma 2, il termine $a_0{}^{n_1}$ si può sostituire con $a_0{}^{\min.(n_1, n_2-1)}$;

2°) nella maggiorazione per $|P'(\sigma)|$ si ha più precisamente il valore $n_1{}^2 2^{n_1-1} H'_1 |\lambda'_1|^{n_1-1}$ come funzione maggiorante;

3°) se β è la radice di massimo modulo di una equazione a coefficienti interi col primo coefficiente b_0 e con altezza H e grado n, allora

$$|\beta| \geq H^{1/n}/2|b_0|.$$

Dai risultati 1°) e 2°) si otterrà, come risultato finale,

$$|\xi'_1 - \lambda'_1| \geq c_1(n_1, n_2)|\lambda'_1| \, |a_0|^{n_1 - \min.(n_1, n_2-1)} H'_1{}^{-n_2} H'_2{}^{-n_1},$$

e ponendo $\xi'_1 = \xi_2$ e $\lambda'_1 = \xi_1$ e ricordando la precedente osservazione 3) si ottiene il teorema enunciato nella II^a Osservazione del n. 1.