Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alessandro Terracini

Su alcuni sistemi di elementi curvilinei.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 395–405.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_395_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1958.

Su alcuni sistemi di elementi curvilinei.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino)

Sunto. - *Si dànno due esempi di sistemi di elementi curvilinei caratterizzati come totalità di elementi trasformati ciascuno in sè da convenienti trasformazioni puntuali, o omografie. Il primo esempio riguarda i sistemi di elementi di second'ordine delle linee integrali, uscenti da un punto assegnato, di un sistema « quasigeodetico ». Il secondo concerne invece, nello spazio ordinario, certe totalità di elementi composti* $E_{2,1}$, *che chiamo sistemi* Γ. *Di questi sistemi* Γ, *che appaiono per la prima volta in questo lavoro, assegno poi anche una caratterizzazione geometrica in un altro ordine di idee.*

Summary. - *Some systems of curvilinear elements may be characterized as the sets of elements which are carried each one into itself by a point to point transformation, or by an homography. Two examples are given in this paper. One of them deals with the* E_2 *of the integral curves passing through a given point of a system of differential equations having the « quasigeodesic form ». In the second example some totalities of « composed curvilinear elements* $E_{2,1}$ », *which I call* Γ *systems are dealt with. Such* Γ *systems, which appear for the first time in the present paper, are also geometrically characterized in another way.*

1. In una ricerca in corso, ho avuto occasione di osservare come certi sistemi di elementi curvilinei si possano caratterizzare come insiemi di elementi trasformati ciascuno in sè da convenienti omografie, o trasformazioni puntuali.

Mentre mi riservo di ritornare sulla questione in altra sede, nelle linee che seguono vorrei illustrare tale punto di vista, che — per quanto spontaneo — non ho avuto occasione di trovare esposto nella letteratura esistente, riferendomi a due esempi.

Il primo esempio (n. 2) concerne gli elementi di second'ordine E_2 delle linee piane, uscenti da un dato punto, integrali di una equazione differenziale *di tipo cubico*

$$y'' = A(x, y) + B(x, y)y' + C(x, y)y'^2 + D(x, y)y'^3,$$

o più in generale, in uno S_n, gli analoghi E_2 per un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\frac{d^2x_i}{dx^2} = A_i + \sum_{j=1}^{n-1} B_{ij}\frac{dx_j}{dx} + \sum_{j,m=1}^{n-1} C_{ijm}\frac{dx_j}{dx}\frac{dx_m}{dx} + \tag{1}$$

$$+ \frac{dx_i}{dx}\sum_{j,m=1}^{n-1} P_{jm}\frac{dx_j}{dx}\frac{dx_m}{dx} \qquad (i=1, 2, \dots, n-1)$$

nelle $n-1$ funzioni incognite $x_1(x), x_2(x), \dots, x_{n-1}(x)$, essendo le A_i, B_{ij}, C_{ijm}, P_{jm} funzioni assegnate di $x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ (1). Questi sistemi di $\infty^{n-1}E_2$ in S_n, uscenti da un punto, si designeranno brevemente nel seguito come *sistemi quasigeodetici.*

Il secondo esempio (n. 4-6) riguarda invece certi sistemi di elementi curvilinei composti (2).

2. In uno S_n, dove assumiamo coordinate proiettive non omogenee $x_0 = x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ (con un simplesso di riferimento di vertici $B^0, B^1, \dots, B^{n-1}, B^n = O$) sia

$$x_i = a_i x + b_i x^2 + [3] \qquad (i=1, 2, \dots, n-1) \tag{2}$$

un E_2 uscente da O.

Sia T una trasformazione puntuale entro S_n, con O unito, regolare in O, che trasformi ciascuno in sè infiniti E_2 (2), le cui rette tangenti in O riempiano la stella di centro O. Allora l'omografia tra direzioni corrispondenti subordinata dalla T entro la stella O è l'identità, cosicchè in prossimità di O la T si può rappresentare con equazioni del tipo

$$X_j = \tau x_j + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} h_{j\alpha\beta}x_\alpha x_\beta + [3] \qquad (j, \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n-1;\ h_{j\alpha\beta} = h_{j\beta\alpha}) \tag{3}$$

(con $\tau \neq 0$). Se ora domandiamo che un E_2 (2) sia trasformato in sè dalla T, si hanno come necessarie e sufficienti le condizioni che seguono, dove poniamo $a_0 = 1$:

$$(\tau - \tau^2)b_i = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} h_{i\alpha\beta}a_\alpha a_\beta + \frac{1}{2}a_i \sum_{\alpha\beta} h_{0\alpha\beta}a_\alpha a_\beta \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1;\ \alpha, \beta = 0, 1, \dots, n-1).$$

(1) Un esempio ben noto di sistema (1) è quello che determina le geodetiche di una V_n di RIEMANN.

(2) La nozione degli elementi curvilinei composti sarà richiamata più avanti, nel n. 3.

Se $\tau \neq 1$, ne segue che la T trasforma in sè tutti e soli gli E_2 (2) per i quali

$$(5) \quad b_i = Q_i(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + a_i Q(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \quad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

dove Q, Q_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sono polinomi quadratici nelle $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ che si esplicitano subito mediante le (4). E viceversa, assunte le (5), dove Q, Q_i siano polinomi quadratici arbitrari, e scelto arbitrariamente $\tau \neq 1$, si possono in infiniti modi determinare i coefficienti $h_{j\alpha\beta}$ $(j, \alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1)$ in modo che le (5) coincidano con le (4).

Prima di passare a considerare il caso $\tau = 1$, giova osservare che (in ogni caso) il sistema delle equazioni che si ottengono eguagliando a zero i secondi membri delle (4) caratterizzano le rette

$$x_0 : x_1 : x_2 : \ldots : x_{n-1} = 1 : a_1 : a_2 : \ldots : a_{n-1}$$

come rette *caratteristiche* uscenti da O [3] relativamente alla trasformazione T.

Ora, se $\tau = 1$, cosicchè i primi membri delle (4) vanno a zero, il sistema delle equazioni ottenute annullando i secondi membri, nelle ipotesi che abbiamo fatto, non deve vincolare $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Ne segue che le rette caratteristiche uscenti da O devono risultare indeterminate, cosicchè la T, nell'intorno del second'ordine di O, è approssimata da un'omografia, la quale non può essere che una omologia speciale di centro O, rappresentata dalle

$$(6) \qquad X_j = \frac{x_j}{1 + \sum_{l=0}^{n-1} k_l x_l} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Concludiamo pertanto che, *in S_n, il sistema degli E_2 uscenti da un punto O, trasformati ciascuno in sè da una trasformazione puntuale T avente in O un punto unito, e regolare in O, nell'ipotesi che le rette tangenti in O agli E_2 del sistema riempiano la stella di centro O, se non include tutti gli E_2 uscenti da O (il qual caso si presenta se e solo se la T è approssimata nell'intorno del second'ordine di O da un'omologia speciale di centro O) è necessariamente un sistema quasigeodetico (e viceversa).*

[3] Cfr. M. VILLA, *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale*, Mem. dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, (9), t. X, 1942-43, cfr. il n. 2.

OSSERVAZIONE. - L'enunciato stesso dimostra — anche se ciò non fosse noto altrimenti — che la nozione di sistema quasigeodetico è invariante per trasformazioni puntuali (il che permetterebbe di rienunciare il teorema precedente sopra una V_n, anzichè in S_n).

Per una ragione affatto analoga, il teorema che si stabilirà nel n. 4 relativamente ai sistemi Γ ivi definiti assicura senz'altro il carattere proiettivo di tale nozione (mentre per i sistemi Δ di cui nel n. 5 ciò risulta, altrimenti, dal teorema di quel n.).

3. In un mio precedente lavoro ho definito (entro uno spazio proiettivo S_r con $r \geq 3$) la nozione di elemento curvilineo composto (4). Applicandola in S_3, limitatamente al caso in cui gli elementi curvilinei in questione appartengono a rami ordinari (condizione che sottintendiamo costantemente nel seguito), un *elemento curvilineo composto* $E_{2,m}$ ($m \geq 0$) è l'insieme dei rami che, in un dato sistema di coordinate proiettive non omogonee xyz (dedotte dalle omogenee y_0, y_1, y_2, y_3 mediante le $x = y_0/y_3$, $y = y_1/y_3$, $z = y_2/y_3$) sono rappresentati da sviluppi in serie

$$(7) \qquad \begin{cases} y = a_{11}x^2 + a_{12}x^3 + \ldots + a_{1,m+1}x^{m+2} + [m+3] \\ z = \qquad\qquad a_{22}x^3 + a_{23}x^4 + \ldots + a_{2,m+2}x^{m+3} + [m+4], \end{cases}$$

dove le $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1,m+1}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2,m+2}$ sono costanti *assegnate* ($a_{11}a_{22} \neq 0$) I predetti rami hanno tutti in comune l'origine (centro) O, la relativa retta tangente o (coincidente con « l'asse x ») ed il piano osculatore ω ($z = 0$). L'insieme $Oo\omega$ si designerà nel seguito come *supporto* dell'elemento curvilineo composto considerato.

Più precisamente, nel seguito avremo a considerare soltanto degli elementi curvilinei composti $E_{2,0}$, $E_{2,1}$, relativamente ai quali ricordiamo quanto segue:

a) per due elementi curvilinei composti $E_{2,0}$ rappresentati rispettivamente da

$$(8) \qquad \begin{aligned} y &= a_{11}x^2 + [3], \quad z = a_{22}x^3 + [4]; \\ y &= b_{11}x^2 + [3], \quad z = b_{22}x^3 + [4], \end{aligned}$$

(aventi dunque in comune il supporto) i rapporti $\sigma = a_{11}/b_{11}$, $\theta = a_{22}/b_{22}$ sono invarianti proiettivi (rilevati da B. SEGRE (5)).

(4) A. TERRACINI, *Sugli elementi curvilinei composti*, Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, vol. 88, 1953-54, pp. 7-15.

(5) B. SEGRE: *Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori*, Lincei Rend. (6), vol. 22, 1935, pp. 392-399. Cfr. anche B. SEGRE, *Some properties of differentiable varieties and transformations*, Springer, 1957, v. il § 17.

b) Per due elementi $E_{2,1}$ rappresentati in modo analogo, aventi in comune lo $E_{2,0}$, dati dunque rispettivamente dalle

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} y = a_{11}x^2 + a_{12}x^3 + [4], \\ z = \qquad\qquad a_{22}x^3 + a_{23}x^4 + [5]; \end{cases}$$

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} y = a_{11}x^2 + b_{12}x^3 + [4], \\ z = \qquad\qquad a_{22}x^3 + b_{23}x^4 + [5]; \end{cases}$$

un invariante proiettivo è fornito (6) dall'espressione

$$(*) \qquad \gamma = \frac{a_{22}(a_{12} - b_{12})}{a_{11}(a_{23} - b_{23})}.$$

4. Ciò premesso, osserviamo anzitutto che, come risulta da un calcolo immediato, la più generale omografia trasformante in sè l'$E_{2,0}$ (8) è data dalle

$$\text{(I)} \qquad X = \frac{p_1x + p_2y + p_3z}{1 + s_1x + s_2y + s_3z}, \qquad Y = \frac{p_1^2y + q_3z}{1 + s_1x + s_2y + s_3z},$$

$$Z = \frac{p_1^3z}{1 + s_1x + s_2y + s_3z},$$

essendo p_1, p_2, p_3, q_3, s_1, s_2. s_3 parametri arbitrari. Si trovano così ∞^7 omografie, che formano un gruppo G_7, il quale è indipendente dai valori di a_{11}. a_{22}, cioè è lo stesso per tutti gli ∞^2 $E_{2,0}$ aventi il supporto $O\omega$. Il G_7 è ovviamente contenuto nel G_9 delle omografie che trasformano il supporto in sè, rappresentato dalle

$$\text{(II)} \qquad X = \frac{p_1x + p_2y + p_3z}{1 + s_1x + s_2y + s_3z}, \qquad Y = \frac{q_2y + q_3z}{1 + s_1x + s_2y + s_3z},$$

$$Z = \frac{r_3z}{1 + s_1x + s_2y + s_3z},$$

con p_1, p_2, p_3, q_2, q_3, r_3, s_1, s_2, s_3 parametri arbitrari.

Un supporto $O\omega$ *definisce* dunque *non solo, ovviamente, il gruppo* G_9 *delle omografie che lo trasformano in sè, ma anche un* G_7 (*manifestamente sottogruppo invariante del* G_9), *costituito dalle omografie che trasformano in sè ciascuno degli* $E_{2,0}$ *aventi quel*

(6) Oltre a l. c. (4), cfr. A. TERRACINI, *Sulle coppie di rami con la stessa origine e gli stessi piani osculatori*, Rend. del Seminario matem. Università e Polit. di Torino, vol. 12, 1953, pp. 265-281.

supporto. Tale G_7 sarà brevemente designato come «*il* G_7 *del supporto* $O o \omega$».

Ci domandiamo ora se un'omografia del G_7 del supporto $O o \omega$ può mutare in sè un elemento composto $E_{2,1}$ contenente quel supporto, rappresentato dunque dalle (9). Il calcolo effettivo dà come necessarie e sufficienti, le due condizioni

$$(11) \qquad \begin{cases} p_1^2(1-p_1)a_{12} + q_3 a_{22} + p_1^2 s_1 a_{11} - 2p_1 p_2 a_{11}^2 = 0, \\ p_1(1-p_1)a_{23} + 2p_1 s_1 a_{22} - 3p_2 a_{11} a_{22} = 0. \end{cases}$$

Allo scopo di semplificare l'enunciato del teorema che costituisce l'oggetto principale del presente n., introduciamo ora una denominazione: chiamiamo *sistema* Γ quello formato dagli ∞^2 elementi composti $E_{2,1}$ di dato supporto che, nella rappresentazione analitica da noi adottata, sono dati dalle (9), dove i coefficienti a_{11}, a_{22} sono arbitrari, mentre a_{12}, a_{23} si esprimono in funzione di a_{11}, a_{22} con formole del tipo

$$(12) \qquad \begin{cases} a_{12} = h_0 a_{22} + h_1 a_{11} + 2h_2 a_{11}^2, \\ a_{23} = \phantom{h_0 a_{22} + {}} 2h_1 a_{22} + 3h_2 a_{11} a_{22}, \end{cases}$$

essendo h_0, h_1, h_2 costanti prefissate (in modo arbitrario). Una caratterizzazione geometrica dei sistemi Γ così definiti risulta dal teorema che segue; un'altra sarà data più avanti, nel n. 6.

Dimostriamo ora il

TEOREMA. – *Il sistema costituito dalla totalità degli elementi* $E_{2,1}$ *di dato supporto* $O o \omega$ *trasformati ciascuno in sè da una stessa omografia non identica* H, *nell'ipotesi che gli elementi* $E_{2,0}$ *degli* $E_{2,1}$ *risultino arbitrari tra quelli aventi il supporto considerato, è necessariamente un sistema* Γ *(e viceversa), a meno che il sistema in questione includa tutti gli* ∞^4 $E_{2,1}$ *aventi quel supporto (il qual caso si presenta se e solo se* H *è un'omografia biassale parabolica, avente come asse la retta* o, *e tale che le rette del fascio* $O\omega$ *appartengano alla congruenza lineare speciale delle rette unite, oppure se* H *è un'omologia speciale col centro in* O *e il piano di omologia passante per la retta* o, *oppure col piano* ω *come piano di omologia, e il centro appartenente alla retta* o).

Se invero H è un'omografia trastormante in sè l'$E_{2,1}$ composto (9), essa muta in sè anche l'$E_{2,0}$ dell'$E_{2,1}$, e per conseguenza, secondo il primo enunciato del presente n., appartiene al G_7 del supporto, cosicchè H è rappresentabile con le (I), e sussistono le (11).

In altre parole, possiamo supporre di prefissare un'omografia rappresentata dalle (I), e cerchiamo la totalità degli $E_{2,1}$ (9) soddisfacenti alle (11).

Se $p_1 \neq 1$, le (11) si possono scrivere nella forma (12): ci troviamo allora in presenza di un sistema Γ. E viceversa, perchè partendo dalle (12), assunto arbitrariamente p_1 non nullo e diverso da 1, si possono in infiniti modi scegliere i coefficienti che compaiono nelle (I) in modo che le (12) coincidano con le (11).

Sia invece $p_1 = 1$. Allora, per attenerci all'ipotesi formulata nell'enunciato, le (11) — che attualmente, fra i coefficienti degli sviluppi (9), involgerebbero solamente a_{11}, a_{22} — devono svanire identicamente, cosicchè $p_2 = q_3 = s_1 = 0$. Quindi in questo caso (nel quale i coefficienti a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23} restano arbitrari) le equazioni dell'omografia H sono della forma

$$\text{(III)} \quad X = \frac{x + p_3 z}{1 + s_2 y + s_3 z}, \quad Y = \frac{y}{1 + s_2 y + s_3 z}, \quad Z = \frac{z}{1 + s_2 y + s_2 z},$$

il che equivale precisamente a dire che tale omografia si trova nelle condizioni descritte alla fine dell'enunciato del teorema, il quale si trova così completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE I. - Se si considerano due elementi composti $E_{2,1}$ aventi il medesimo supporto, e si ricercano le omografie che li trasformano ciascuno in sè, il teorema che precede permette di prevedere una risposta, la quale comunque si ottiene in modo più preciso mediante la considerazione che segue. Se i due elementi composti sono rappresentati rispettivamente dalle (9) e da formole analoghe nelle quali in luogo di a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23} si scrivano rispettivamente b_{11}, b_{12}, b_{22}, b_{23}, i coefficienti che compaiono nelle equazioni (I) di un'omografia soddisfacente alle condizioni richieste devono soddisfare al sistema di quattro equazioni lineari omogenee in

$$p_1 - p_1^2, \quad q_3/p_1, \quad p_1 s_1, \quad p_2,$$

che sono fornite dalle (11) e dalle equazioni analoghe nelle quali in luogo delle a si scrivano le b. Perciò è necessariamente $p_1 = 1$, $q_3 = s_1 = p_2 = 0$, cioè si ottengono solamente omografie del tipo (III), cioè omografie biassali paraboliche e omologie speciali nelle condizioni precisate nell'ultima parte del teorema, a meno che risulti nullo il determinante del predetto sistema lineare omogeneo, cioè a meno che sia soddisfatta la condizione

$$(13)\qquad \frac{(a_{12}b_{22}-a_{22}b_{12})(b_{11}-a_{11})}{a_{11}b_{11}}=a_{23}\left(\frac{b_{11}}{6a_{11}}+\frac{b_{22}}{2a_{22}}-\frac{2a_{11}b_{22}}{3a_{22}b_{11}}\right)+$$

$$+b_{23}\left(\frac{a_{11}}{6b_{11}}+\frac{a_{22}}{2b_{22}}-\frac{2a_{22}b_{11}}{3a_{11}b_{22}}\right).$$

Perciò *due elementi composti* $E_{2,1}$ *col medesimo supporto, in generale, sono trasformati ciascuno in sè soltanto da* ∞^3 *omografie* (*omografie biassali paraboliche, e omologie speciali, nelle condizioni descritte nell'ultima parte dell'enunciato del teorema precedente*). *La condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano ulteriori omografie nelle condizioni richieste è che, nella rappresentazione analitica adottata, sia soddisfatta la* (13).

OSSERVAZIONE II. – Se per brevità chiamiamo provvisoriamente coomografici due $E_{2,1}$ col medesimo supporto quando si trovano nelle condizioni specificate nell'ultima parte dell'enunciato che precede, la (13) rende evidente che due $E_{2,1}$ per uno stesso $E_{2,0}$ sono sempre coomografici. Ma maggiormente interessa osservare che, come si deduce facilmente dalla (13), *fissati due elementi composti* $E_{2,0}^{(1)}$, $E_{2,0}^{(2)}$ *col medesimo supporto, due* $E_{2,1}$ *contenenti* $E_{2,0}^{(1)}$ *sono coomografici con uno stesso* $E_{2,1}$ *per* $E_{2,0}^{(2)}$ *se e solo se il loro invariante proiettivo* γ (la cui definizione è richiamata nella (*) del n. 3) *è legato agli invarianti* σ, θ *di B. Segre di* $E_{2,0}^{(1)}$, $E_{2,0}^{(2)}$ *dalla*

$$\gamma=\frac{1}{\sigma-1}\left\{\frac{2\sigma}{3}-\frac{\theta}{6\sigma}-\frac{1}{2}\right\}.$$

5. Il teorema enunciato nel n. 4 fornisce una caratterizzazione dei sistemi Γ di elementi composti $E_{2,1}$ alla luce del punto di vista adottato nella presente Nota. Ma il risultato acquista un maggior interesse se dei sistemi Γ possiamo dare una definizione geometrica diretta. Ciò appunto otterremo nei n. 5, 6.

Definiamo anzitutto dei sistemi ∞^2 di $E_{2,1}$ con lo stesso supporto, più generali dei sistemi Γ: precisamente, chiamiamo *sistema* Δ quello formato dagli ∞^2 elementi composti $E_{2,1}$ di dato supporto che — nella rappresentazione analitica da noi adottata — sono rappresentati dalle (9), dove i coefficienti a_{11}, a_{22} sono arbitrari, mentre a_{12}, a_{23} si esprimono in funzione di essi con formole del tipo

$$(14)\qquad \begin{cases} a_{12}=k_0a_{22}+k_1a_{11}+2k_2a_{11}{}^2, \\ a_{23}=\qquad\quad 2k_1a_{22}+3k_3a_{11}a_{22}, \end{cases}$$

dove k_0, k_1, k_2, k_3 sono costanti prefissate (in modo arbitrario). Che la nozione così posta abbia significato geometrico, risulterà da quanto diremo più avanti: per ora ci accontentiamo di osservare che, se nelle (14) è $k_2 = k_3$, il sistema Δ si riduce a un sistema Γ.

Prima di procedere, rileviamo quanto segue:

1) L'elemento composto $E_{2,1}$ rappresentato dalle (9) si proietta dal suo centro O sul piano $x = 1$ nell'elemento E_3 dato dalla

$$z = \lambda y^2 + \mu y^3 + [4] \tag{15}$$

con

$$\lambda = \frac{a_{22}}{a^2_{11}}, \quad \mu = \frac{a_{23}}{a_{11}{}^3} - \frac{2a_{12}a_{22}}{a^4_{11}}. \tag{16}$$

2) La totalità degli $E_{2,1}$ (9) che dal loro centro si proiettano sul piano $x = 1$ negli ∞^1 E_3 di un sistema G (7), cioè negli ∞^1 E_3 (15) dove λ è arbitrario, mentre μ è definito in funzione di λ dalla

$$\mu = - h_2\lambda - 2h_0\lambda^2, \tag{17}$$

essendo h_0, h_2 costanti prefissate (arbitrarie). è dato dalle (9), dove si assuma

$$a_{11}a_{23} - 2a_{12}a_{22} + 2h_0a^2_{22} + h_2a^2_{11}a_{22} = 0. \tag{18}$$

La (18) è una conseguenza delle (12), senza che, ovviamente, sia ad esse equivalente. Quindi gli ∞^2 $E_{2,1}$ di un sistema Γ si proiettano dal loro centro su un piano qualunque non passante per esso secondo gli ∞^1 E_3 di un sistema G, senza tuttavia che questa proprietà sia sufficiente a caratterizzare i sistemi Γ. Comunque, essa si può evidentemente considerare entro la stella di centro O (senza fare riferimento al piano sul quale si proietta) e allora dà luogo, entro la stella, alla considerazione di un « sistema G stellare », e anche, per questo, a quella di una *retta satellite* e di un *piano satellite* (ottenuti proiettando da O rispettivamente il punto satellite e la retta satellite, quali sono stati richiamati nella nota (7)) nella stella di centro O. La retta satellite in questione,

(7) Ricordiamo che così si chiama un sistema di $\infty^1 E_3$ di un dato piano, contenenti uno stesso E_1 Aa, quando essi appartengono a coniche tangenti in A alla retta a e tali che un dato punto P della a abbia come polare una data retta p per A. A norma di denominazioni introdotte in A. TERRACINI, *Sobre la ecuación diferencial* $y''' = G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''^2$, Rev. de matem. y fís. teór. de la Universidad Nac. de Tucumán, vol. 2, 1941, pp. 245-329, il punto P e la retta p si chiamano rispettivamente

per evitare confusioni con un'altra che sarà introdotta tra poco, sarà denominata la *prima retta satellite.*

3) Ricordando che la nozione degli elementi curvilinei composti da noi considerati è duale di sé stessa (8), introduciamo, nel sistema di riferimento adottato anche coordinate di piano: dapprima omogenee η_0, η_1, η_2, η_3, e poi non omogenee $\xi=\eta_1/\eta_2$, $\eta=\eta_0/\eta_2$, $\zeta=\eta_3/\eta_2$. Allora, in coordinate di piano, l'elemento curvilineo composto $E_{2,1}$ (9), è rappresentato dagli sviluppi del tutto analoghi:

$$
(19) \qquad \begin{cases} \eta = l_{11}\xi^2 + l_{12}\xi^3 + [4], \\ \zeta = \qquad\qquad l_{22}\xi^3 + l_{23}\xi^4 + [5]. \end{cases}
$$

dove

$$
(20) \qquad \begin{cases} l_{11} = \dfrac{a^2{}_{11}}{3a_{22}}, \quad l_{12} = -\dfrac{a^2{}_{11}a_{12}}{3a^2{}_{22}} + \dfrac{4a^3{}_{11}a_{23}}{27a^3{}_{22}}, \\[2ex] l_{22} = \dfrac{a^3{}_{11}}{27a^2{}_{22}}, \quad l_{23} = -\dfrac{2a^3{}_{11}a_{12}}{27a^3{}_{22}} + \dfrac{a^4{}_{11}a_{23}}{27a^4{}_{22}}. \end{cases}
$$

Se ora domandiamo la totalità degli $E_{2,1}$ (9) che danno luogo alla proprietà duale di quella considerata sotto 2), ciò equivale a domandare l'esistenza di due costanti h'_0, h'_2 tali che (cfr. la (18)) sia

$$
(21) \qquad l_{11}l_{23} - 2l_{12}l_{22} + 2h'_0l^2{}_{22} + h'_2l^2{}_{11}l_{22} = 0.
$$

Esplicitando nella (21) le l_{11}, l_{12}, l_{22}, l_{23} a norma delle (20), il sistema formato dalle (18), (21) si scrive nella forma (14), qualora si ponga

$$
k_0 = h_0, \; k_1 = -k'_0, \; k_2 = (h_2 - 3h'_2)/4, \; k_3 = -h'_2.
$$

Concludiamo perciò intanto: *un sistema* Δ *di elementi composti* $E_{2,1}$ *si proietta dal centro comune di questi secondo un sistema G stellare, e gode contemporaneamente della proprietà duale. Viceversa, la coesistenza di queste due proprietà caratterizza i sistemi* Δ.

punto satellite e *retta satellite* (del sistema G di E_3). Le totalità ∞^1 di E_3 in questione sono quelle che BOMPIANI (*Geometria degli elementi differenziali.* Roma, 1955, v. la p. 182) chiama *fasci speciali.*

(8) A. TERRACINI, l. c. (4), v. p. 10. Cfr. A. TERRACINI: *Relazioni tra invarianti duali di coppie di elementi curvilinei,* questo Boll. 1953, pp. 368-374.

Secondo l'enunciato che precede, la nozione di sistema Δ è dunque autoduale. Se ne ha del resto una conferma materiale in quanto, per mezzo delle (20), le (14) si trasformano nelle

$$\text{(22)} \qquad \begin{cases} l_{12} = k'_0 l_{12} + k'_1 l_{11} + 2k'_2 l^2_{11}, \\ l_{23} = \qquad 2k'_1 l_{22} + 3k'_3 l_{11} l_{22}, \end{cases}$$

dove k'_0, k'_1, k'_2, k'_3 sono quattro nuove costanti, legate alle k_0, k_1, k_2, k_3 dalle

$$\text{(23)} \qquad k'_0 = -k_1, \; k'_1 = -k_0, \; k'_2 = -3k_2 + 2k_3, \; k'_3 = -4k_2 + 3k_3.$$

6. Resta ora a vedere in qual modo, nell'ordine di idee considerato nel n. precedente, si possa arrivare ad una caratterizzazione non più dei sistemi Δ, ma dei sistemi Γ. Ora questo si può fare in base alla considerazione della *prima retta satellite* (nozione valida per i sistemi di elementi composti considerati sotto 2), e quindi in particolare per i sistemi Δ), e della *seconda retta satellite* (definita, per dualità, per ogni sistema di $E_{2,1}$ quale considerato sotto 3)).

Orbene, *condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema Δ sia un sistema Γ è che la seconda retta satellite coincida con la prima.*

Per verificarlo si osservi anzitutto che p. e. dalle formole (1·5) della mia Memoria l. c. (7) adattate al caso attuale, segue che per un sistema Δ la prima retta satellite è

$$x = (3k_3 - 4k_2)y, \quad z = 0.$$

Per dualità, la seconda retta satellite, in coordinate omogenee di piano, ha le equazioni

$$(4k'_2 - 3k'_3)\eta_0 + \eta_1 = 0, \quad \eta_3 = 0,$$

e perciò in coordinate di punto (tenuto conto delle relazioni (23)) è la

$$x + k_3 y = z = 0.$$

Domandare la coincidenza delle due rette satelliti equivale dunque a domandare $k_3 = k_2$, il che dimostra l'asserto.

Il teorema così dimostrato, insieme con quello del n. 5, fornisce appunto una nuova definizione geometrica dei sistemi Γ di elementi composti $E_{2,1}$.