Bollettino
Unione Matematica Italiana

Gino Arrighi

Considerazioni sulla cinematica del punto.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.3, p. 430–437.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_3_430_0>

Considerazioni sulla cinematica del punto.

Nota di GINO ARRIGHI (a Lucca)

Sunto. - *In questa nota si conduce un esame delle caratteristiche cinematiche dal punto di vista della teoria delle derivate delle funzioni finite continue. Lo studio si conclude con la trattazione di alcuni casi particolari di carattere illustrativo.*

Summary. - *An examination of the kinematic characteristics from the point of view of the derivatives of the continuous finite functions is made in this note. The study reaches a conclusion dealing some special cases of illustrative character.*

1. In una trattazione classica della cinematica di un punto P si considera che esso si mantenga al finito e, escludendosi pieghe o lacerazioni dello spazio, funzione continua in qualunque intervallo finito, per altro comunque esteso, della variabile tempo t mentre la sua velocità oltrechè finita, tenendo conto delle posizioni relativistiche, si considera che si mantenga limitata in grandezza. Subordinatamente ad una espressa legge di moto si porrebbe poi il problema della determinazione temporale di una causa conseguentemente ad un «Postulato fondamentale» che riportiamo nella dizione di GIORGI (1): «Ogni possibile variazione di condizioni fisiche di un sistema di corpi equivale sempre, nei suoi effetti meccanici, a un sistema di forze singole, definibili e misurabili per mezzo del filo teso campione». Ma nelle condizioni premesse per P si potrà parlare, al più, di velocità media in qualunque intervallo di tempo non avendosi, ovviamente, sicurezza della esistenza ovunque della velocità giacchè, quando si proceda alla ricerca di essa, oltre a quello di inesistenza, potranno presentarsi altresì casi di infinità, determinata o meno. E ciò mentre la espressione in termini analitici della «Lex II», che NEWTON enuncia fra gli «Axiomata, sive leges motus», presuppone per $P(t)$ condizioni ben meno generali di quelle inizialmente qui richiamate.

Nell'intento di analizzare dettagliatamente alcune di tali questioni cinematiche, se non ci avessero sconsigliato motivi di spazio,

(1) *I Postulati della statica* in «Pontificia Academia Scientiarum Communicationes»; Anno VII, Vol. VII, N. 18 (1943).

avremmo svolto direttamente alcune considerazioni di tipo differenziale attorno ai punti e ai vettori funzioni di una variabile, per altro interessanti attesa la particolarità delle determinazioni medie, nell'ordine di quelle condotte dal PEANO [2] attorno alle formazioni geometriche; abbiamo, invece, condotto tali ricerche facendo, volta a volta, riferimento ai fondamentali studi del DINI [3] attorno alle esistenze delle derivate delle funzioni finite e continue.

Premesso che le condizioni, volta a volta richiamate, per la velocità e la accelerazione intendono riferirsi ai loro rispettivi vettori, ci limiteremo a precisare quanto segue.

Diremo che un vettore $\vec{u}$ variabile appartiene ad un corpo finito quando tale è il campo dei punti $0 + \vec{u}$ con 0 punto fisso al finito. Varrà altresì considerare un certo campo finito di vettori, che diremo di tipo $\mathfrak{L}$, così definito: è possibile determinare un numero $\delta > 0$ tale che un intorno sferico chiuso di 0, di raggio δ, è costituito solo da punti esterni al minimo campo convesso chiuso che contenga i predetti punti $0 + \vec{u}$. Relativamente ai successivi teoremi I e IV si potrà allora stabilire la eguaglianza di ordine di infiniti corrispondentemente al caso, scalare, del mantenersi di una quantità fra due valori non nulli e dello stesso segno [4]; ciò che si realizza per le componenti di vettori appartenenti ad un campo finito di tipo $\mathfrak{L}$.

Inoltre intenderemo che un vettore ha limite determinato infinito quando la sua componente secondo un determinato versore ha limite infinito determinato di segno, mentre ogni altra componente secondo versori normali al predetto ha limite determinato finito o finisce col restare compreso fra limiti finiti o ha limite infinito di ordine inferiore. Il versore precedentemente detto lo diremo *versore principale*.

2. TEOREMA I. – *Se in ogni istante di un intorno a destra (sinistra) di* t', t' *escluso, la velocità è determinata finita, continua o no, e, per* $t \to t' + 0$ ($t \to t' - 0$), *diviene infinita di ordine* n, *il punto, per* $t \to t' + 0$ ($t \to t' - 0$), *se* $n \geq 1$ *non si mantiene al finito*

[2] *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*; Bocca, Torino, 1887; Cap. I e IV. *Calcolo geometrico*; Bocca, Torino, 1888; Cap. VIII. Nel seguito indicheremo questa seconda opera con C. G. e indicazione del numero di paragrafo.

[3] *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*; Nistri, Pisa, 1878. Nel seguito richiameremo questa opera con F. T. e indicazione del numero di paragrafo.

[4] F. T. 27. C. G. 68.

e se $\mathrm{n} = 1 - \mathrm{p}$, *con* $0 < \mathrm{p} < 1$ *finito, si mantiene al finito ed ha limite determinato al finito.*

Per ipotesi in ogni istante di un intorno a destra (sinistra) di t', t' escluso, tutte le componenti della velocità rispetto da una terna cartesiana sono determinate finite, continue o no, e ve n'è una che, per $t \to t' + 0\,(t \to t' - 0)$ diviene infinita di ordine n; mentre ogni altra componente, se infinita diviene, lo diviene al più dello stesso ordine. Pertanto la coordinata del punto, della quale la predetta componente ne è la derivata, per $n = 1$ o $n = 1 + p$, con $p > 0$, diviene (5) infinita, rispettivamente di ordine logaritmico o di ordine p; mentre per $n = 1 - p$, con p finito minore di 1, resta (6) limitata ed ha limite determinato finito. Con ciò il teorema è dimostrato.

Teorema II. – *Se, per* $\mathrm{t} \to \mathrm{t}' + 0\,(\mathrm{t} \to \mathrm{t}' - 0)$, *la velocità ha limite determinato finito o limite infinito questo limite è uguale alla velocità posteriore (anteriore) in* t'. *Se, non esistendo il limite predetto, esiste un intorno a destra (sinistra) di* t' *tale che, per ogni* t *interno ad esso, la velocità appartiene ad un campo finito, se la velocità posteriore (anteriore) in* t' *non è determinata finita, pure la velocità media posteriore (anteriore)*

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{t}' + \tau) - \mathrm{P}(\mathrm{t}')}{\tau} \qquad \left(\frac{\mathrm{P}(\mathrm{t}' - \tau) - \mathrm{P}(\mathrm{t}')}{\tau}\right) \qquad \tau > 0,$$

per tale intervallo, appartiene ad un insieme finito.

Per ipotesi, per $t \to t' + 0\,(t \to t' - 0)$, tutte le componenti della velocità rispetto ad una terna cartesiana hanno limite determinato finito o, almeno, ve n'è una che ha limite infinito, allora (7) ciascuno dei predetti limiti è uguale alla corrispondente componente della velocità posteriore (anteriore) in t'. Se poi una almeno, delle predette componenti non ha limite determinato ma varia fra limiti finiti, mentre le altre hanno limite determinato finito o variano fra limiti finiti, allora (8) il rapporto incrementale destro (sinistro) della coordinata corrispondente del punto, se non ha limite determinato finito, varia fra limiti finiti. Con ciò il teorema è dimostrato.

Teorema III. – *Se in un intervallo la velocità posteriore (anteriore) è determinata finita continua, la velocità è determinata finita continua ed eguale ad essa nell' intervallo stesso.*

(5) F. T. 73.
(6) F. T. 74.
(7) F. T. 75.
(8) F. T. 75.

Per ipotesi la derivata a destra (sinistra) di ogni coordinata del punto rispetto ad una terna cartesiana è determinata finita continua in un intervallo; allora (9) la derivata di ogni coordinata è determinata finita continua ed eguale ad essa nell'intervallo stesso. Con ciò il teorema è dimostrato.

Con ragionamenti analoghi a quelli superiormente svolti si dimostrerebbero i tre seguenti teoremi pei quali, pertanto, ci limiteremo a fornir l'enunciato.

TEOREMA IV. – *Se in ogni istante di un intorno a destra (sinistra) di* t', t' *escluso, la accelerazione è determinata finita, continua o no, e, per* $t \to t' + 0 \, (t \to t' - 0)$, *diviene infinita di ordine* n, *la velocità, per* $t \to t' + 0 \, (t \to t' - 0)$, *se* $n \geq 1$ *non si mantiene finita e se* $n = 1 - p$, *con* $0 < p < 1$ *finito, si mantiene finita ed ha limite determinato finito.*

TEOREMA V. – *Se, per* $t \to t' + 0 \, (t \to t' - 0)$, *la accelerazione ha limite determinato finito o limite infinito questo limite è uguale alla accelerazione posteriore (anteriore) in* t'. *Se, non esistendo il limite predetto, esiste un intorno a destra (sinistra) di* t' *tale che, per ogni* t *interno ad esso, la accelerazione appartiene ad un campo finito, se la accelerazione posteriore (anteriore) in* t' *non è determinata finita, pure la accelerazione media posteriore (anteriore)*

$$\frac{\vec{v}(t' + \tau) - \vec{v}(t')}{\tau} \qquad \left(\frac{\vec{v}(t' - \tau) - \vec{v}(t')}{\tau}\right) \qquad \tau > 0,$$

per tale intervallo, appartiene ad un insieme finito.

TEOREMA VI. – *Se in un intervallo la accelerazione posteriore (anteriore) è determinata finita continua, la accelerazione è determinata finita continua ed uguale ad essa nell' intervallo stesso.*

Il Teor. I pone una condizione circa l'ordine secondo cui diviene infinita la velocità affinchè il punto resti al finito, mentre il Teor. IV pone una condizione circa l'ordine secondo cui diviene infinita la accelerazione affinchè la velocità resti finita; la importanza del p finito, come negli enunciati, è mostrata dal comportamento, per $t \to +0$, della funzione $\log^n t$, con $n \geq 1$ intero e dove nel calcolo dei successivi logaritmi si sostituisce il suo valore assoluto quando il precedente sia negativo. Tale funzione diviene infinita mentre la sua derivata $[t . \log t . \log^2 t \dots \log^{n-1} t]^{-1}$ diviene ivi infinita di ordine inferiore al primo ma non per meno di una quantità finita.

(9) F. T. 148, 3°.

Il Teor. II pone un criterio per cui la velocità, anteriore o posteriore, risulti determinata finita o resulti infinita ovvero perchè la velocità media, anteriore o posteriore, resulti appartenere ad un insieme finito, mentre il Teor. V pone un criterio per cui la accelerazione, anteriore o posteriore, resulti determinata finita o resulti infinita ovvero perchè la accelerazione media, anteriore o posteriore, resulti appartenere ad un insieme finito.

Si consideri adesso un intervallo per ogni istante del quale la velocità è determinata finita continua fatta, al più, eccezione per un istante t^*, interno ad esso, nel quale presenta una discontinuità tale che, essendo determinate finite le velocità anteriore e posteriore, è per altro $\vec{v}(t^*-0) \pm \vec{v}(t^*+0)$; alla trattazione di siffatti intervalli ci si riduce quando il movimento è generalmente continuo cioè la velocità presenta quelle discontinuità isolate che competono ad urto; onde diremo che in t^* la velocità presenta una *singolarità di urto*. Con una opportuna scelta di t_1 e t_2, supponendo che per gli intervalli (t_1, t^*) e (t^*, t_2) sia verificata una condizione del Teor. III e che in un intorno a destra e in un intorno a sinistra di t^* sia verificata la condizione del Teor. II circa il limite determinato finito, avremo realizzato un intervallo (t_1, t_2) che contiene nel suo interno, al più, un istante t^* dove può aversi una singolarità di urto: avvenimento compatibile col Teor. III e il passo richiamato del Teor. II.

3. Adesso, relativamente agli istanti nei quali la accelerazione non è definita, introdurremo un ente cinematico che pur ne conservi i caratteri di limite e di dimensione.

La formazione geometrica

$$\frac{\Delta P(t')}{\tau^2} = \frac{P(t'+\tau) - 2P(t') + P(t'-\tau)}{\tau^2} \qquad \tau > 0$$

sarà detta vettore della *accelerazione media generalizzata* in t' per la semiampiezza τ, e

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\Delta P(t')}{\tau^2}$$

se esiste determinato, finito o no, sarà detto vettore della *accelerazione (istantanea) generalizzata* in t'.

Teorema VII. – *Se in* t′ *la accelerazione è determinata, finita o no, essa è uguale alla accelerazione generalizzata in* t′.

Per ipotesi tutte le componenti della accelerazione in t' rispetto ad una terna cartesiana sono determinate finite e allora [10] sono eguali alle derivate seconde generalizzate delle coordinate del punto delle quali dette componenti sono le derivate seconde in t'; ovvero vi è una componente che è infinita determinata di segno mentre le altre, se non hanno valori determinati finiti, variano fra limiti finiti: anche allora [11] la componente predetta è eguale alla derivata seconda generalizzata della corrispondente coordinata. Con ciò il teorema è dimostrato.

La formazione geometrica

$$\frac{P(t'+2\tau)-2P(t'+\tau)+P(t')}{\tau^2},$$

per $\tau > 0$ ($\tau < 0$), sarà detta vettore della *accelerazione media generalizzata posteriore (anteriore)* in t' per la semiampiezza τ ($-\tau$) e se, per $\tau \to +0$ ($\tau \to -0$) il predetto vettore ha limite determinato, finito o no, questo sarà detto vettore della *accelerazione generalizzata posteriore (anteriore)* in t'.

Con ragionamenti analoghi a quelli superiormente svolti [12] si dimostrerebbe il

Teorema VIII. – *Se in* t′ *la accelerazione posteriore (anteriore) è determinata finita essa è eguale alla accelerazione generalizzata posteriore (anteriore).*

Teorema IX. – *Se in* t* *la velocità presenta una singolarità di urto ivi, non essendo definita la accelerazione, la accelerazione generalizzata è determinata infinita.*

Il vettore della accelerazione media generalizzata in t^* per la semiampiezza τ può scriversi pure nella forma

$$\frac{\dfrac{P(t^*+\tau)-P(t^*)}{\tau}-\dfrac{P(t^*-\tau)-P(t^*)}{-\tau}}{\tau}=\frac{\vec{v}(t^*+0)-\vec{v}(t^*-0)}{\tau}+\frac{\vec{\varepsilon}}{\tau}$$

dove $\vec{\varepsilon}$ è un vettore infinitesimo con τ. Pertanto il secondo addendo del secondo membro, se infinito diviene, lo diviene di ordine inferiore a quello del primo addendo e il versore di $\vec{v}(t^*+0)-\vec{v}(t^*-0)$ è il versore principale. Con ciò il teorema è dimostrato.

[10] F. T. 174.
[11] F. T. 174.
[12] F. T. 175.

4. Prima di concludere queste considerazioni reputiamo non inutile mostrare alcuni esempi relativi ai casi del paragrafo precedente e all'uopo si consideri la legge

$$P(t) = O + f(t) \cdot \overrightarrow{a} + \varphi(t) \cdot \overrightarrow{b}$$

dove: O è un punto fisso al finito, $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ sono vettori costanti finiti e $f(t)$ ha ovunque derivata seconda determinata finita.

Per

$$\varphi(t') = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(t) = (t - t') \cos \frac{1}{t - t'} \quad \text{per} \quad t \neq t'$$

ovvero

$$\varphi(t') = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(t) = (t - t') \operatorname{sen}^2 \frac{1}{t - t'} \quad \text{per} \quad t \neq t',$$

onde la (1) è sempre determinata finita continua, è

$$\frac{P(t' + \tau) - P(t')}{\tau} = \frac{f(t' + \tau) - f(t')}{\tau} \cdot \overrightarrow{a} + \cos \frac{1}{\tau} \cdot \overrightarrow{b}$$

ovvero

$$\frac{P(t' + \tau) - P(t')}{\tau} = \frac{f(t' + \tau) - f(t')}{\tau} \cdot \overrightarrow{a} + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{\tau} \cdot \overrightarrow{b},$$

in t' la velocità non è definita ma, in entrambi i casi, si ha

$$\frac{\Delta P(t')}{\tau^2} = \frac{f(t' + \tau) - 2f(t') + f(t' - \tau)}{\tau^2} \cdot \overrightarrow{a}$$

onde la accelerazione generalizzata in t' è, in entrambi i casi, determinata finita ed eguale a $f''(t') \cdot \overrightarrow{a}$.

Per

$$\varphi(t^*) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi(t) = (t - t^*) \frac{e^{\frac{1}{t-t^*}} - e^{-\frac{1}{t-t^*}}}{e^{\frac{1}{t-t^*}} + e^{-\frac{1}{t-t^*}}} \quad \text{per} \quad t \neq t^*,$$

onde la (1) è sempre determinata finita continua, è

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}(t^* + 0) &= f'(t^*) \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{v}(t^* - 0) &= f'(t^*) \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}; \end{aligned} \tag{2}$$

in t^* la velocità presenta una singolarità di urto ed è

$$\frac{\Delta P(t^*)}{\tau^2} = \frac{f(t^* + \tau) - 2f(t^*) + f(t^* - \tau)}{\tau^2} \cdot \overrightarrow{a} + \frac{2}{\tau} \frac{e^{\frac{1}{\tau}} - e^{-\frac{1}{\tau}}}{e^{\frac{1}{\tau}} + e^{-\frac{1}{\tau}}} \cdot \overrightarrow{b}$$

onde la accelerazione generalizzata in t^* è deteɹminata infinita e il suo versore principale è quello di $\overrightarrow{b}$.

Per

$$\varphi(t) = |t - t^*|^{\frac{5}{3}} + |t - t^*|$$

onde la (1) è sempre determinata finita continua, valgono ancora le (2); in t^* la velocità presenta una singolarità di urto ed è

$$\frac{\Delta P(t^*)}{\tau^2} = \frac{f(t^* + \tau) - 2f(t^*) + f(t^* - \tau)}{\tau^2} \cdot \overrightarrow{a} + 2\left(\frac{1}{|\tau|^{\frac{1}{3}}} + 1\right) \cdot \overrightarrow{b}$$

onde la accelerazione generalizzata in t^* è determinata infinita e il suo versore principale è quello di $\overrightarrow{b}$. Fuori di t^* la accelerazione è determinata finita ed eguale a

$$f''(t) \cdot \overrightarrow{a} + \frac{10}{9} |t - t^*|^{-\frac{1}{3}} \cdot \overrightarrow{b}$$

onde la accelerazione generalizzata è continua in t^* ([13]).

Per

$$\varphi(t) = |t - t^*|,$$

onde la (1) è sempre determinata finita continua, valgono ancora le (2); in t^* la velocità presenta una singolarità di urto ed è

$$\frac{\Delta P(t^*)}{\tau^2} = \frac{f(t^* + \tau) - 2f(t^*) + f(t^* - \tau)}{\tau^2} \cdot \overrightarrow{a} + \frac{2}{|\tau|} \cdot \overrightarrow{b}$$

onde la accelerazione generalizzata in t^* è determinata infinita e il suo versore principale è quello di $\overrightarrow{b}$. Fuori di t^* la accelerazione è determinata finita ed eguale a

$$f''(t) \cdot \overrightarrow{a}$$

onde la accelerazione generalizzata ha in t^* una discontinuità con un infinito isolato. Una discontinuità dello stesso tipo si ha per $\varphi(t) = \operatorname{sen} |t - t^*|$.

([13]) F. T. 148, 2°.