Bollettino
Unione Matematica Italiana

Marius I. Stoka

Geometria integrale in uno spazio euclideo E_n.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **13** (1958), n.4, p. 470–485.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1958_3_13_4_470_0>

Geometria integrale in uno spazio euclideo E_n.

Nota di MARIUS I. STOKA (a Bucarest)

Sunto. - *Considerando i risultati ottenuti anteriormente sui gruppi misurabili e sulle misure degli insiemi di varietà, l'autore introduce la nozione di famiglie misurabili, dimostrando alcune proprietà di queste famiglie.*

Summary. - *Considering the results previously obtained for measurable groups and for the measure of sets of varieties, the author introduces the notion of measurable family and gives the properties of these families.*

Sia uno spazio euclideo E_n di coordinate $x^1, \dots, x^n$. Consideriamo un gruppo di Lie di trasformazioni in questo spazio, definito dalle equazioni

$$y^i = f^i(x^1, \dots, x^n, a^1, \dots, a^r) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{1}$$

dove $a^1, \dots, a^r$ sono parametri essenziali.

La funzione $F(x^1, \dots, x^n)$ è funzione invariante integrale del gruppo, se

$$\int_{\mathfrak{A}_x} F(x^1, \dots, x^n)\, dx^1 \dots dx^n = \int_{\mathfrak{A}_y} F(y^1, \dots, y^n)\, dy^1 \dots dy^n,$$

per ogni insieme di punti $\mathfrak{A}_x$ dello spazio E_n per il quale l'integrale ha senso.

R. DELTHEIL ha mostrato [2] (1) che le funzioni invarianti integrali di un gruppo di trasformazioni di Lie sono le soluzioni del sistema di equazioni con derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial x^i} [\xi^i_h(x) F(x)] = 0 \qquad (h = 1, \dots, r) \tag{2}$$

dove $\xi^i_h(x)$ sono i coefficienti delle trasformazioni infinitesimali del gruppo (1).

Abbiamo chiamato gruppo misurabile il gruppo di Lie che ammette un invariante integrale unico, facendo astrazione di una costante moltiplicativa.

In un lavoro anteriore [7] (2), abbiamo dimostrato il teorema

(1) Pag. 28.
(2) Pag. 485.

Perchè il gruppo di trasformazioni (1) *sia misurabile è necessario e sufficiente che il gruppo sia transitivo e siano verificate le relazioni*

$$c^l_{uv}\xi^i_h\xi^j_l\bar{\xi}^u_j\bar{\xi}^v_i - c^l_{uk}\xi^j_l\bar{\xi}^u_j = 0 \qquad (i,\ j,\ u,\ v = 1, \dots, n) \tag{3}$$

dove $c^\alpha_{\beta\gamma}$ *è il tensore di struttura del gruppo, e* $\bar{\xi}^u_r$ *è il reciproco dell'elemento* ξ^v_u *nel determinante non nullo della matrice* $\|\xi^i_h\|$.

Nella prima parte di questo lavoro dimostreremo alcune proprietà dei gruppi misurabili, che applicheremo poi, nella seconda e nella terza parte del lavoro stesso, alle famiglie di varietà.

I.

DEFINIZIONE. – *Chiameremo base di un gruppo transitivo* G_r *il sistema di funzioni* $\xi^i_\alpha(x)\,(\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{1, \dots, r\})$ *che formano un determinante non nullo.*

Dimostreremo

LEMMA 1. - *Se il gruppo* G_r *è transitivo, allora esso ha almeno due basi.*

Per questo ammettiamo che la matrice $\|\xi^i_h\|$ abbia un solo determinante diverso da zero, $\Delta = \det\|\xi^i_j\|\ (i,\ j = 1, \dots, n)$, e che tutti gli altri determinanti dell'ordine n della matrice siano nulli.

Dunque abbiamo

$$\begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^n \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \dots & \xi^n_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi^1_{n-1} & \xi^2_{n-1} & \dots & \xi^n_{n-1} \\ \xi^1_{n+1} & \xi^2_{n+1} & \dots & \xi^n_{n+1} \end{vmatrix} = 0 .$$

Ne risulta che

$$\xi^i_{n+1}(x) = \lambda^\alpha(x)\xi^i_\alpha(x) \qquad (\alpha = 1, \dots, n-1). \tag{4}$$

Ma, se notiamo con Δ_α il determinante ottenuto da Δ sostituendo la linea α colla linea $n+1$ della matrice $\|\xi^i_h\|$, dalla supposizione fatta risulta

$$\Delta_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots, n-1).$$

Sostituendo qui la relazione (4) risulta

$$\lambda^\alpha(x)\,\Delta = 0$$

Ma $\Delta \neq 0$, dunque

$$\lambda^{\alpha}(x) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-1).$$

Risulta che

$$\xi^{i}{}_{n+1}(x) = 0$$

ciò che è assurdo, perchè il gruppo G_r ha r parametri.

LEMMA 2. - *Se il gruppo* G_r, *definito dagli operatori* $X_h = \xi^i{}_h(x) \dfrac{\partial f}{\partial x^i} (h = 1, \ldots, r)$ *ha un sottogruppo misurabile* $G_s(X_1, \ldots, X_s)$, *allora la condizione necessaria e sufficiente perchè esso sia misurabile è*

$$c^l{}_{uv}\, \xi^i{}_k\, \xi_l{}^w\, \bar{\xi}^u{}_w\, \bar{\xi}^v{}_i - c^h{}_{uw}\, \bar{\xi}^w{}_h\, \xi^u{}_k = 0 \tag{5}$$
$$(i, u, v, w = 1, \ldots n;\ h = 1, \ldots, r;\ l = 1, \ldots, s;\ k = s+1, \ldots, r)$$

dove $\bar{\xi}^u{}_w$ *è il reciproco dell'elemento* $\xi^w{}_u$ *del* det $\| \xi^i{}_j \| = 0$.

Infatti, tenendo conto che il gruppo G_s è definito dagli operatori $X_1, \ldots, X_s$, risulta

$$c^h{}_{l_1 l_2} = 0. \tag{6}$$

Noteremo

$$A_l = c^{l_1}_{uv}{}_{\,l}\, \xi^w_{l_1} \bar{\xi}^u_w \bar{\xi}^v_i - c^l_{ul}\, \xi^w_{l_1} \bar{\xi}^u_w$$

$$\bar{A}_h = c^{h_1}_{uv} \xi^i_h\, \xi^w_{h_1}\, \bar{\xi}^u_w\, \bar{\xi}^v_i - c^{h_1}_{uh}\, \xi^w_{h_1}\, \bar{\xi}^u_w .$$

Sostituendo ora nelle espressioni di $\bar{A}_h$ la relazione (6), otteniamo

$$\bar{A}_l = A_l$$
$$\bar{A}_k = c^l{}_{uv}\, \xi^i{}_k\, \xi_l{}^w\, \bar{\xi}^u{}_w\, \bar{\xi}_i{}^v - c^l{}_{uk}\, \bar{\xi}^u{}_w .$$

Ma il gruppo G_s è misurabile, dunque $A_l = 0$. Risulta che $\bar{A}_l = 0$, e, tenendo conto che le condizioni di misurabilità del G_r sono appunto $\bar{A}_l = 0$, $\bar{A}_k = 0$, risulta il lemma.

Da ciò risulta che se G_r è non misurabile, ma esso ha un sottogruppo G_s misurabile, allora è valevole almeno una delle ineguaglianze

$$\bar{A}_k \neq 0 \qquad (k = s+1, \ldots, r).$$

LEMMA 3. – *Se il gruppo* $G_r(X_1, \dots, X_r)$ *ha due sottogruppi misurabili* $G_s(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_s})$ e $G_t(X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_t})(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t \in \{1, \dots, r\})$ *che hanno una base comune, allora questi sottogruppi hanno gli invarianti integrali uguali* (3).

Per semplificare la notazione ammetteremo che la base comune dei due sottogruppi sia $X_1, \dots, X_n$. Gli invarianti integrali dei gruppi G_s e G_t sono dati dai sistemi di equazioni con derivate parziali

$$G_s : \begin{cases} \xi^i_j \dfrac{\partial LnF_1}{\partial x^i} = -\dfrac{\partial \xi^i_j}{\partial x^i} \\ \xi^i_\alpha \dfrac{\partial LnF_1}{\partial x^i} = -\dfrac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial x^i} \end{cases} \qquad (\alpha = \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_s)$$

$$G_t : \begin{cases} \xi^i_j \dfrac{\partial LnF_2}{\partial x^i} = -\dfrac{\partial \xi^i_j}{\partial x^i} \\ \xi^i_\beta \dfrac{\partial LnF_2}{\partial x^i} = -\dfrac{\partial \xi^i_\beta}{\partial x^i} \end{cases} \qquad (\beta = \beta_{n+1}, \dots, \beta_t).$$

Ma, tenendo conto che i gruppi G_s e G_t sono misurabili e che il det $\| \xi^i_j \| \neq 0$ risulta che i due sistemi hanno una soluzione comune, dunque i due invarianti sono eguali.

LEMMA 4. – *I sottogruppi di un gruppo* G_r *hanno fra i loro invarianti integrali tutti gli invarianti integrali del gruppo* G_r.

Possiamo supporre [8] (4) che il gruppo G_r sia definito dagli operatori $X_1, \dots, X_r$, ed il suo sottogruppo G_s dagli operatori $X_1, \dots, X_s$.

Le loro funzioni invarianti integrali sono date dunque dai sistemi

$$G_r : \frac{\partial}{\partial x^i} [\xi^i_h(x) F(x)] = 0 \qquad (h = 1, \dots, r)$$

$$G_s : \frac{\partial}{\partial x^i} [\xi^i_l(x) F(x)] = 0 \qquad (l = 1, \dots, s)$$

ed è evidente che il secondo sistema ha fra le sue soluzioni tutte le soluzioni del primo sistema.

CONSEGUENZA 1. – *Se un gruppo* G_r *misurabile ha un sottogruppo misurabile, allora i loro invarianti integrali sono eguali.*

CONSEGUENZA 2. – *Se un gruppo* G_r *ha un sottogruppo transitivo* G_s *non misurabile, allora il gruppo* G_r *è non misurabile.*

(3) Due invarianti integrali sono eguali se essi differiscono tra di loro per una costante moltiplicativa.

(4) Pag. 84.

Se il gruppo G_r fosse misurabile, esso avrebbe un invariante integrale, il quale in base al lemma già dimostrato, sarebbe invariante integrale anche per G_s. Ma G_s essendo transitivo e non misurabile non ha nessun invariante integrale.

Dunque G_r è non misurabile.

Ora dimostreremo

TEOREMA 1. *Sia* $G_r(X_1, \dots, X_r)$ *un gruppo non misurabile che ha*

$$c^k_{uv}\, \xi^i_{n+1}\, \bar{\xi}_k^{\,w}\, \bar{\xi}^u_{\,w}\, \bar{\xi}_i^{\,v} - c^k_{u\,,\,n+1}\, \bar{\xi}_k^{\,w}\, \bar{\xi}^u_{\,w} \neq 0.$$

Se questo gruppo ha due sottogruppi misurabili definiti dagli operatori

$$G_s: X_1, \dots, X_{n-1}, X_n, X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_{s-n}}$$
$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-n}, \beta_1, \dots, \beta_{t-n} \in \{n+2, \dots, r\})$$
$$G_t: X_1, \dots, X_{n-1}, X_{n+1}, X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_{t-n}}$$

che hanno le basi $X_1, \dots, X_n$, *rispettivamente* $X_1, \dots, X_{n-1}, X_{n+1}$ *e non hanno nessuna base comune, allora i sottogruppi* G_s *e* G_t *hanno i loro invarianti integrali ineguali.*

Noteremo con F_1 e F_2 le funzioni invarianti integrali dei gruppi G_s e G_t, e

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \xi^1_1 & \xi^2_1 & \dots & \xi^n_1 \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \dots & \xi^n_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi^1_{n-1} & \xi^2_{n-1} & \dots & \xi^n_{n-1} \\ \xi^1_n & \xi^2_n & \dots & \xi^n_n \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \xi^1_1 & \xi^2_1 & \dots & \xi^n_1 \\ \xi^1_2 & \xi^2_2 & \dots & \xi^n_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi^1_{n-1} & \xi^2_{n-1} & \dots & \xi^n_{n-1} \\ \xi^1_{n+1} & \xi^2_{n+1} & \dots & \xi^n_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial Ln F_1}{\partial x^i} &= -\bar{\xi}_i^{\,\alpha} \frac{\partial \xi^j_\alpha}{\partial x^j} - \bar{\xi}_i^{\,n} \frac{\partial \xi^j_n}{\partial x^j} \\ \frac{\partial Ln F_2}{\partial x^i} &= -\bar{\zeta}_i^{\,\alpha} \frac{\partial \xi^j_\alpha}{\partial x^j} - \bar{\zeta}_i^{\,n+1} \frac{\partial \xi^j_{n+1}}{\partial x^j} \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, \dots, n-1)$$

dove $\bar{\zeta}^\alpha_\beta$ è il reciproco dell'elemento ξ^β_α del determinante Δ_2.

Dunque

$$\frac{\partial Ln \dfrac{F_1}{F_2}}{\partial x^i} = (\bar{\zeta}_i^{\,\alpha} - \bar{\xi}_i^{\,\alpha}) \frac{\partial \xi^j_\alpha}{\partial x^j} - \bar{\xi}_i^{\,n} \frac{\partial \xi^j_n}{\partial x^j} + \bar{\zeta}_i^{\,n+1} \frac{\partial \xi^j_{n+1}}{\partial x^j}. \tag{7}$$

Si può facilmente mostrare che si ha la relazione

$$\bar{\zeta}_i{}^{\alpha} - \bar{\xi}_i{}^{\alpha} = (-1)^{n+\alpha+1} \frac{\bar{\xi}_i{}^{n}}{\Delta_2} \Delta^{\alpha}$$

dove Δ^{α} è il determinante formato cogli elementi $\xi^i{}_1, \dots, \xi^i{}_{\alpha-1}, \xi^i{}_{\alpha+1}, \dots, \xi^i{}_n, \xi^i{}_{n+1}$.

Si ha similmente

$$\xi_i{}^n \Delta_1 = \bar{\zeta}_i{}^{n+1} \Delta_2 .$$

Sostituendo queste relazioni in (7), troviamo

$$\frac{\partial Ln \dfrac{F_1}{F_2}}{\partial x^i} = \frac{\bar{\xi}_i{}^n}{\Delta_2} \begin{vmatrix} \xi^1{}_1 & \xi^2{}_1 & \dots & \xi^n{}_1 & \dfrac{\partial \xi^i{}_1}{\partial x^i} \\ \xi^1{}_2 & \xi^2{}_2 & \dots & \xi^n{}_2 & \dfrac{\partial \xi^i{}_2}{\partial x^i} \\ \vdots & \vdots & & & \\ \xi^1{}_n & \xi^2{}_n & \dots & \xi^n{}_n & \dfrac{\partial \xi^i{}_n}{\partial x^i} \\ \xi^1{}_{n+1} & \xi^2{}_{n+1} & \dots & \xi^n{}_{n+1} & \dfrac{\partial \xi^i{}_{n+1}}{\partial x^i} \end{vmatrix}$$

e, tenendo conto di un calcolo anteriore [7] (5)

$$\frac{\partial Ln \dfrac{F_1}{F_2}}{\partial x^i} = \frac{\bar{\xi}_i{}^n}{\Delta_2} \left(c^k{}_{uv}\, \xi^j{}_{n+1}\, \xi^w{}_k\, \xi^u{}_w \bar{\xi}^v{}_j - c^k{}_{u\,,\,n+1}\, \xi^w{}_k\, \bar{\xi}^u{}_w\right). \tag{8}$$

Ma $\Delta_1 \neq 0$, dunque, almeno uno dei reciproci $\xi_i{}^n$ è non nullo. Risulta che almeno una delle derivate $\dfrac{\partial Ln \frac{F_1}{F_2}}{\partial x^i}$ è diversa da zero, dunque gli invarianti integrali F_1 e F_2 sono ineguali.

Dimostreremo ora

TEOREMA 2. - *Se il gruppo* $G_{n+1}(X_1, \dots, X_{n+1})$ *dello spazio* E_n *ammette due sottogruppi semplicemente transitivi* $G'_n(X_1, \dots, X_n)$ *e* $G''_n(X_1, \dots, X_{n-1}, X_{n+1})$ *allora perchè il gruppo* G_{n+1} *sia misurabile è necessario e sufficiente che i gruppi* G'_n *e* G''_n *abbiamo gli invarianti integrali uguali.*

(5) Pag. 487.

In un lavoro anteriore [7] (6), abbiamo dimostrato il teorema:

Perchè il gruppo di trasformazioni G_{n+1} *sia misurabile è necessario e sufficiente che il gruppo sia transitivo e sia soddisfatta la relazione*

$$c_j \xi^i_{n+1} \bar{\xi}^j_i - c_{n+1} = 0 \qquad (i, j = 1, \dots, n)$$

dove $c_h = c^l_{lh}$ $(h, l = 1, \dots, n+1)$ *è il vettore di struttura del* VRANCEANU *del gruppo.*

Supponendo che il gruppo $G_{n+1}(X_1, \dots, X_{n+1})$ abbia due sottogruppi semplicemente transitivi G'_n e G''_n (7), cogli invarianti integrali F_1 e F_2 la formula (8) diviene

$$\frac{\partial Ln \dfrac{F_1}{F_2}}{\partial x^i} = \bar{\xi}^i_n (c_j \xi^l_{n+1} \bar{\xi}^j_l - c_{n+1}) \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \qquad (i, j, l = 1, \dots, n) \tag{9}$$

Tenendo conto che almeno un $\bar{\xi}^i_n$ è non nullo, risulta che se F_1 e F_2 sono eguali allora $c_j \xi^l_{n+1} \bar{\xi}^j_l - c_{n+1} = 0$.

II.

Consideriamo ora nello spazio E_n una famiglia $\mathfrak{F}_q$ di varietà con p dimensioni $\mathfrak{V}_p$, definita dalle equazioni

$$F^j(x^1, \dots, x^n, \alpha^1, \dots, \alpha^q) = 0, \qquad (j = 1, \dots, n-p) \tag{10}$$

dove $\alpha^1, \dots, \alpha^q$ sono q parametri essenziali.

Sia T una trasformazione continua di coordinate dello spazio E_n che lascia globalmente invariante la famiglia $\mathfrak{F}_q$ di varietà, cioè per ogni varietà $\mathfrak{V}_p \in \mathfrak{F}_q$, esiste una varietà $\mathfrak{V}'_p \in \mathfrak{F}_q$ di modo che

$$T\mathfrak{V}_p = \mathfrak{V}'_p .$$

L'insieme di tutte le trasformazioni T con questa proprietà forma un gruppo di trasformazioni di Lie, che noteremo $\mathcal{G}$. Sia ora S una trasformazione di $\mathcal{G}$, avendo la proprietà

$$S\mathfrak{V}_p = \mathfrak{V}_p .$$

per qualsiasi $\mathfrak{V}_p \in \mathfrak{F}_q$.

L'insieme delle trasformazioni S, aventi questa proprietà, forma un gruppo g, che è un sottogruppo invariante di $\mathcal{G}_r$.

(6) Pag 489.

(7) G. VRANCEANU ha dato in [9] le condizioni sufficienti perchè un gruppo G_{n+1} ammetta un sottogruppo semplicemente transitivo.

Possiamo dunque associare al gruppo G, il gruppo fattore

$$G = \mathcal{G}/g$$

il quale ha la proprietà di lasciare globalmente invariante la famiglia di varietà $\mathcal{F}_q$, senza contenere trasformazioni (oltre quella identica) che lascino invariante ogni varietà $\mathcal{V}_p$ dalla famiglia $\mathcal{F}_q$.

Chiameremo il gruppo G *il gruppo massimo d' invarianza della famiglia* $\mathcal{F}_q$, *ed i suoi sottogruppi, gruppi d'invarianza della medesima famiglia* $\mathcal{F}_q$.

Sia G_r un tale gruppo d'invarianza della famiglia $\mathcal{F}_q$, definito dalle equazioni

$$y^i = f^i(x^1, \dots, x^n, a^1, \dots, a^r) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{11}$$

nelle quali $a^1, \dots, a^r$ sono i parametri essenziali.

Dunque si ha

$$F^j[f^1(x, a), \dots, f^n(x, a), \alpha^1, \dots, \alpha^q] = F^j(x^1, \dots, x^n, \beta^1, \dots, \beta^q) \tag{12}$$

dove

$$\beta^k = g^k(\alpha^1, \dots, \alpha^q, a^1, \dots, a^r) \qquad (k = 1, \dots, q). \tag{13}$$

Dunque al gruppo G_r di invarianza della famiglia $\mathcal{F}_q$ si associa nello spazio E_q dei parametri alla famiglia $\mathcal{F}_q$ la famiglia di trasformazioni (13).

In un lavoro anteriore [6] (8), ho dimostrato il teorema seguente:

La famiglia di trasformazioni (13) *forma un gruppo isomorfo col gruppo* G_r *di invarianza della famiglia di varietà* $\mathcal{F}_q$.

Chiameremo il gruppo (13) *gruppo associato al gruppo* G_r *e lo noteremo con* H_r.

Supponendo che il gruppo associato H_r sia misurabile e denotando con $F(\alpha^1, \dots, \alpha^q)$ la sua funzione invariante integrale, ho definito la misura delle varietà della $\mathcal{F}_q$ nel modo seguente [6] (9).

Chiamiamo misura dell'insieme $\mathcal{A}$ *di varietà* $\mathcal{V}_p$ *dello spazio* E_n

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} \dots \int F(\alpha^1, \dots, \alpha^q) d\alpha^1, \dots, d\alpha^q, \tag{14}$$

dove $\mathcal{A}_\alpha$ *è l'insieme dei punti che corrisponde, nello spazio* E_q *dei dei parametri, all'insieme* $\mathcal{A}$ *di varietà* $\mathcal{V}_p$.

Chiameremo famiglia misurabile quella famiglia di varietà che ammette una misura unica.

(8) Pag. 911.
(9) Pag. 913.

Presenteremo adesso una condizione sufficiente di misurabilità di una famiglia di varietà.

TEOREMA 3. – *Se il gruppo associato al gruppo massimo di invarianza di una famiglia di varietà è misurabile, allora la famiglia è misurabile.*

Infatti, il gruppo H, associato al gruppo massimo di invarianza G della famiglia, è misurabile, dunque la famiglia ammette almeno una misura.

Supponendo che la famiglia di varietà ammetta ancora una misura $\mu' \neq \mu$, risulta che esiste un gruppo H_r associato ad un gruppo di invarianza G_r della famiglia di varietà il quale è misurabile e rispetto al quale la famiglia ammette la misura μ'. Ma G_r essendo un gruppo di invarianza, esso è un sottogruppo di G e, in base all'isomorfismo, risulta $H_r \subset H$. Dunque in base alla conseguenza 1 del lemma 5, $\mu' = \mu$.

Se il gruppo associato al gruppo massimo di invarianza è non misurabile, la famiglia di varietà può essere e non essere misurabile Presenteremo adesso un teorema di non misurabilità di una famiglia di varietà.

TEOREMA 4. – *Sia* $H_r(X_1, \dots, X_r)$ *il gruppo associato al gruppo massimo di invarianza della famiglia* $\mathfrak{F}_q$. *Se questo gruppo è non misurabile avendo*

$$c^k_{uv}\,\xi^i_{q-1}\,\xi^w_k\,\bar{\xi}^u_w\,\bar{\xi}^v_i - c^k_{u,\,q+1}\,\xi^w_k\,\bar{\xi}^u_w \neq 0 \qquad (i, u, v, w = 1, \dots, q;\ k = 1, \dots, r)$$

ed ha due sottogruppi misurabili definiti dagli operatori

$$H_s: X_1, \dots, X_{q-1}, X_q, X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_{s-q}}$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-q}, \beta_1, \dots, \beta_{t-q} \in \{q+2, \dots, r\})$$

$$H_t: X_1, \dots, X_{q-1}, X_{q+1}, X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_{t-q}}$$

i quali hanno le basi $X_1, \dots, X_q$ *e rispettivamente* $X_1, \dots, X_{q-1}, X_{q+1}$ *e non hanno nessuna base comune, allora la famiglia di varietà* $\mathfrak{F}_q$ *è non misurabile.*

Infatti dal teorema 2 risulta che i gruppi H_s e H_t hanno invarianti integrali ineguali, dunque la famiglia $\mathfrak{F}_q$ è non misurabile.

III.

Applichiamo adesso questo teorema ad alcune famiglie di varietà usuali.

1°. L'insieme dei cerchi del piano.

Si sa che il gruppo massimo di invarianza dell'insieme dei cerchi del piano è il gruppo delle similitudini. Nel lavoro citato

[6] ([10]) ho dimostrato che il gruppo associato a questo gruppo di fronte all'insieme dei cerchi è misurabile e dunque, in base al teorema 3, risulta che

L'insieme dei cerchi del piano è misurabile.

2°. L'insieme delle coniche del piano.

Il gruppo massimo di invarianza di questo insieme è il gruppo proiettivo. Ho già mostrato [6] ([11]) che il gruppo associato al gruppo proiettivo, di fronte all'insieme delle coniche è misurabile. Dunque

L'insieme delle coniche del piano è misurabile.

3°. L'insieme delle iperboli del piano.

Considereremo nel piano (x, y) le iperboli di equazione

$$x^2 + 2Axy + (A^2 - B^2)y^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0 \tag{15}$$

Il gruppo massimo di invarianza di questo insieme è il gruppo affine. Il gruppo associato a questo gruppo, rispetto alle iperboli (15) è misurabile e ha come funzione invariante integrale

$$F(A, B, C, D, E) = \frac{B}{\Delta^2}$$

dove

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & A & C \\ A & A^2 - B^2 & D \\ C & D & E \end{vmatrix}$$

è il discriminante dell'iperbole (15).

Dunque

L'insieme delle iperboli è misurabile e la misura è data dalla formola

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{B}{\Delta^2}\, dA\, dB\, dC\, dD\, dE.$$

In modo analogo si ottiene

L'insieme delle ellissi di equazione

$$x^2 + 2Axy + (A^2 + B^2)y^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$$

è misurabile, e la misura è

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{B}{\Delta^2}\, dA\, dB\, dC\, dD\, dE,$$

([10]) Pag. 915.

([11]) Pag. 920.

dove

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & A & C \\ A & A^2 + B^2 & D \\ C & D & E \end{vmatrix}$$

è il discriminante dell'equazione dell'ellissi.

4. L'insieme delle terne di punti (12) del piano.

Considereremo l'insieme delle terne di punti del piano di equazione

$$(16) \qquad x = a_i\,, \quad y = b_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Il gruppo massimo di invarianza di questo insieme è il gruppo proiettivo. L. A. SANTALÒ ha mostrato [4] (13) che il gruppo associato a questo gruppo rispetto alla famiglia (16) è misurabile ed ha la funzione invariante integrale

$$F(a_i\,,\ b_i) = \frac{1}{\Delta^3}$$

dove

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Risulta

L'insieme delle terne di punti è misurabile, avendo la misura

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_x} \frac{dP_1 dP_2 dP_3}{\Delta^3}$$

dove $dP_i = da_i db_i$.

5. L'insieme delle coppie « retta + punto » del piano.

Consideriamo l'insieme delle coppie « retta+punto » rappresentato dalle equazioni

$$(17) \qquad G : ux + vy + 1 = 0 \qquad P : \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \qquad (ua + vb + 1 \neq 0).$$

(12) Chiamiamo terna di punti del piano un sistema di tre punti non collineari.

(13) Pag. 135.

Mostrasi che il gruppo massimo di invarianza di questo insieme è il gruppo proiettivo. L. A. SANTALO ha mostrato [4] ([14]) che il gruppo associato a questo gruppo, rispetto all'insieme (17) è misurabile e possiede la funzione invariante integrale

$$F(a,\ b,\ u,\ v) = \frac{1}{(au + bv + 1)^3}\,.$$

Dunque

L'insieme delle coppie «rette + punto» (9) è misurabile di misura

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{dGdP}{(au + bv + 1)^3} \tag{18}$$

dove $dG = dudv$; $dP = dadb$

6. L'insieme dei parallelogrammi del piano.

Consideriamo l'insieme dei parallelogrammi di equazioni

$$\begin{cases} u_i x + v_i y + 1 = 0 \\ k_i(u_i x + v_i y) + 1 = 0 \end{cases} \qquad (i = 1,\ 2;\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0;\ k_1 \neq 1). \tag{19}$$

Il gruppo massimo di invarianza di questo insieme è il gruppo affine. Il gruppo associato di questo gruppo rispetto alla famiglia (19) è misurabile ed ha la funzione invariante integrale

$$F(u_i\,,\ v_i\,,\ k_i) = \frac{1}{(k_1 - 1)^2 (k_2 - 1)^2 (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2}\,.$$

Dunque

L'insieme dei parallelogrammi del piano (19) è misurabile e ammette la misura

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{dk_1 dk_2 dG_1 dG_2}{(k_1 - 1)^2 (k_2 - 1)\,(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2}\,.$$

Ci occuperemo di qualche insieme di varietà non misurabili.

7. L'insieme delle rette del piano.

M. W. CROFTON [1] ha trovato per l'insieme delle rette del piano

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{20}$$

([14]) Pag. 135.

di fronte al gruppo dei movimenti del piano la misura

$$\mu_1(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{dG}{(u^2 + v^2)^{3/2}}.$$

L. A. SANTALÒ [4] (15) ha trovato, rispetto al gruppo centroaffine unimodulare la misura

$$\mu_2(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} dG.$$

Considerando il gruppo

$$\text{(21)} \qquad \begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \beta y \end{cases}$$

otteniamo

Rispetto al gruppo (21) *l'insieme delle rette* (20) *ammette la misura*

$$\mu_3(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{dG}{uv}.$$

Dunque

L'insieme delle rette del piano è non misurabile.

8. **L'insieme delle coppie di rette del piano.**

Sia nel piano l'insieme delle coppie di rette dato dalle equazioni

$$\text{(22)} \qquad u_i x + v_i y + 1 = 0 \qquad (i = 1, 2) \qquad (u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0).$$

Il gruppo massimo di invarianza di questo insieme è il gruppo proiettivo. Rispetto a questo gruppo l'insieme delle coppie di rette non ammette misura.

Considereremo adesso il gruppo affine unimodulare. Il gruppo associato di questo gruppo, rispetto alla famiglia (22) è misurabile ed ha la funzione invariante integrale

$$F(u_i, v_i) = \frac{1}{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^3}.$$

Dunque

L'insieme delle coppie di rette (22) *ammette, rispetto al gruppo affine unimodulare la misura*

$$\mu_1(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{dG_1 dG_2}{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^3}.$$

(15) Pag. 121.

Considerando il gruppo centroaffine, otteniamo

L'insieme delle coppie di rette (22) *ammette, rispetto al gruppo centroaffine la misura*

$$\mu_2(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{dG_1 dG_2}{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2}.$$

Considerando il gruppo

$$(23)\qquad \begin{cases} x' = \dfrac{\alpha x}{\gamma x + \delta y + 1} \\[2mm] y' = \dfrac{\beta y}{\gamma x + \delta y + 1} \end{cases}$$

otteniamo

Rispetto al gruppo (23) *l'insieme delle coppie di rette* (22) *ha la misura*

$$\mu_3(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{dG_1 dG_2}{(u_1 - u_2)^2 (v_1 - v_2)^2}.$$

Risulta che

L'insieme delle coppie di rette del piano è non misurabile.

9. L'insieme delle parabole del piano.

Consideriamo

$$(24)\qquad x^2 + 2Axy + A^2y^2 + 2Bx + 2Cy + D = 0.$$

Shiing-Shen Chern ha mostrato [5] che, rispetto al gruppo affine unimodolare, l'insieme delle parabole (24) ammette la misura

$$\mu_1(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{dA dB dC dD}{(C - AB)^{8/3}}.$$

Considerando il gruppo delle similitudini troviamo

L'insieme delle parabole (24) *ammette, rispetto al gruppo delle similitudini, la misura*

$$\mu_2(\mathfrak{A}) = \int_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{1 + A^2}{(C - AB)^4}\, dA dB dC dD.$$

Rispetto al gruppo centroaffine otteniamo

L'insieme delle parabole (24) *ammette, rispetto al gruppo centroaffine la misura*

$$\mu_3(\mathfrak{A}) = \int\limits_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{dAdBdCdD}{D(C-AB)^2}.$$

Considerando il gruppo

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta \\ y' &= \gamma y + \delta \end{aligned}\right. \tag{25}$$

otteniamo

L'insieme delle parabole (24) *ammette, rispetto al gruppo* (25) *la misura*

$$\mu_4(\mathfrak{A}) = \int\limits_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{A^2dAdBdCdD}{(C-AB)^4}.$$

Risulta

L'insieme delle parabole del piano è non misurabile.

10. L'insieme delle coppie di punti del piano.

Consideriamo l'insieme dei punti del piano $P_i(a_i, b_i)$ $(i = 1, 2)$ equivalente all'insieme di rette

$$x = a_i, \ y = b_i. \qquad (i = 1, 2) \tag{26}$$

Il gruppo massimo di invarianza di questo insieme è il gruppo proiettivo. Rispetto a questo gruppo l'insieme (26) non ammette misura.

Considereremo adesso il gruppo affine unimodulare. L.A. SANTALÒ ha mostrato [3] che il gruppo associato a questo gruppo rispetto alla famiglia (26) è misurabile. La funzione invariante integrale è

$$F(a_i, b_i) = 1.$$

Dunque

L'insieme delle coppie di punti $P_i(a_i, b_i)$ $(i = 1, 2)$ *ammette rispetto al gruppo affine unimodulare la misura*

$$\mu_1(\mathfrak{A}) = \int\limits_{\mathfrak{A}_\alpha} dP_1dP_2.$$

Considerando il gruppo centroaffine troviamo

L'insieme di coppie di punti $P_i(a_i, b_i)$ $(i = 1, 2)$ *ammette rispetto al gruppo centroaffine la misura*

$$\mu_2(\mathfrak{A}) = \int\limits_{\mathfrak{A}_\alpha} \frac{dP_1dP_2}{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}.$$

Considerando il gruppo delle similitudini del piano, troviamo

L'insieme delle coppie di punti $P_i(a_i, b_i)$ $(i = 1, 2)$ *ammette rispetto al gruppo delle similitudini la misura*

$$\mu_3(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} \frac{dP_1 dP_2}{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

Considerando il gruppo (25) otteniamo

L'insieme delle coppie di punti $P_i(a_i, b_i)$ $(i = 1, 2)$ *ammette rispetto al gruppo* (25) *la misura*

$$\mu_4(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}_\alpha} \frac{dP_1 dP_2}{(a_1 - a_2)^2 (b_1 - b_2)^2}.$$

Risulta che

L'insieme delle coppie di punti del piano è non misurabile.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. W. CROFTON, *Geometrical theorems related to mean values*, Proc. of the London Math. Soc., 8(1877) 304-309.

[2] R. DELTHEIL, *Probabilités géométriques*, Paris, 1926.

[3] L. A. SANTALÒ, *Integral geometry in projective and affine spaces*, Ann. of Math., 51(1950) 739-755.

[4] L. A. SANTALÒ, *Introduction to integral geometrie*, Act. Sci. et Ind., Paris, 1953.

[5] SHIING-SHEN CHERN, The Sc. Rep. of Nat. Tsiung Hua Univ., 4(1940).

[6] M. STOKA, *Masura unei multimi de varietati dintr-un spatiu* R_n, Bul. St. Acad. R. P. R., T. VII, Nr. 4, 1955.

[7] M. STOKA, *Asupra grupurilor* G_r *masurabile dintr-un spatiu* E_n, Comunicarile Acad. R. P. R., T. VIII, Nr. 10, 1958.

[8] G. VRANCEANU, *Leçons de Géométrie Differentielle*, Bucarest, 1957.

[9] G. VRANCEANU, *Sur les sous groupes simplement transitifs d'un groupe transitif de mouvement*, Bul. de la Soc. des Sci. de Cluj (Roumanie), T. VI, 1932, 429-445.