Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco G. Tricomi

Sul resto delle formule di quadratura numerica migliorate col metodo di "estrapolazione".

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.1, p. 102–104.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_1_102_0>

Sul resto delle formule di quadratura numerica migliorate col metodo di «estrapolazione»

Nota di Francesco G. Tricomi (a Torino)

Sunto. - *In questa breve Nota viene data l'espressione ed un confine superiore del resto di certe formule di quadratura numerica «migliorate» e. particolarmente, della formula di* Simpson *«migliorata».*

Summary. - *In this short paper is given the expression and an upper bound for the remainder of certain «improved» numerical quadrature formulas, and expecially for the «improved»* Simpson*'s formula*

Molte formule di quadratura numerica hanno la struttura seguente: Si divide l'intervallo d'integrazione (a, b) in n parti uguali (di ampiezza $\omega = (b - a)/n$) e, coi valori dell'integrando $f(x)$ nei punti di divisione ed eventuali altri elementi (differenze tabulari ecc.), si forma (per lo più integrando certi polinomi) una certa espressione approssimata A_n dell'integrale; nel senso che può porsi

$$I = \int_a^b f(x)dx = A_n + R_n\,, \tag{1}$$

dove R_n è un *resto* che — ammesso che la funzione f abbia derivate fino ad un certo ordine r (dipendente dal tipo di formula adoperato) — è generalmente suscettibile di un'espressione della forma

$$R_n = \alpha n \omega^{r+1} f^{(r)}(\xi), \tag{2}$$

essendo α una costante assoluta e ξ un opportuno punto dell'intervallo (a, b).

Per esempio, nel caso della formula di Simpson, posto $n = 2m$ e

$$S_d = \sum_{k=1}^{m} f[a + (2k - 1)\omega], \qquad S_p = \sum_{k=1}^{m-1} f(a + 2k\omega),$$

si ha notoriamente

$$A_{2m} = \frac{\omega}{3}[f(a) + f(b) + 4S_d + 2S_p], \qquad R_{2m} = -\frac{m\omega^5}{90} f^{IV}(\xi).$$

La circostanza che il resto abbia la forma (2) consente di migliorare l'approssimazione con un elegante artificio denominato, alquanto impropriamente, *metodo di estrapolazione*, che consiste in questo:

Supponiamo di eseguire il calcolo dell'integrale I due volte; una volta con la divisione in n parti uguali e l'altra con la divisione in $2n$ parti uguali: si avrà allora simultaneamente

$$(3) \qquad I = A_n + \alpha n\omega^{r+1} f^{(r)}(\xi), \qquad I = A_{2n} + 2^{-r}\alpha n\omega^{r+1} f^{(r)}(\xi^*),$$

avendo indicato con ξ^* un altro conveniente punto dell'intervallo (a, b).

Se per caso fosse $f^{(r)}(\xi) = f^{(r)}(\xi^*)$ — come, ad esempio, certamente avverrebbe se, essendo $f(x)$ un polinomio di grado $\leq r$ la derivata *r-esima* risultasse costante — le (3) consentirebbero di aver subito il valore *esatto* dell'integrale I. Invero, da esse si trarrebbe allora che

$$\alpha n\omega^{r+1} f^{(r)}(\xi) = \alpha n\omega^{r+1} f^{(r)}(\xi^*) = \frac{A_{2n} - A_n}{1 - 2^{-r}},$$

e ne seguirebbe *rigorosamente* che

$$I = A_{2n} + \frac{A_{2n} - A_n}{2^r - 1}.$$

Dato però che, in generale, la precedente condizione non sarà soddisfatta, l'ultima formula è solo una nuova formula *approssimata* per il calcolo di I; che pertanto converrà scrivere sotto la forma

$$(4) \qquad I = A_{2n} + \frac{A_{2n} - A_n}{2^r - 1} + R_{2n}^*,$$

avendo indicato con R_{2n}^* un nuovo resto.

Fin qui sono cose abbastanza note. Quello invece che non sembra noto è che di questo resto R_{2n}^* si può dare un'elegante espressione che consente di assegnare subito un confine superiore del suo valore assoluto, se si conosce l'*oscillazione* $\Omega^{(r)}$ della derivata *r-esima* nell'intervallo (a, b), o un suo valore maggiorante [1].

All'uopo si osservi che dalla (4) e dalla seconda delle (3), si deduce che

$$R_{2n}^* = I - A_{2n} - \frac{A_{2n} - A_n}{2^r - 1} = 2^{-r}\varkappa n\omega^{r+1} f^{(r)}(\xi^*) - \frac{A_{2n} - A_n}{2^r - 1}$$

ma, d'altra parte, da entrambe le (3), si ha

$$A_{2n} - A_n = \varkappa n\omega^{r+1}[f^{(r)}(\xi) - 2^{-r} f^{(r)}(\xi^*)];$$

quindi potremo scrivere che

$$R_{2n}^* = \varkappa n\omega^{r+1}[2^{-r} f^{(r)}(\xi^*) - \frac{1}{2^r - 1} f^{(r)}(\xi) + \frac{2^{-r}}{2^r - 1} f^{(r)}(\xi^*)]$$

cioè che

$$\boxed{R_{2n}^* = \frac{\varkappa n\omega^{r+1}}{2^r - 1}[f^{(r)}(\xi^*) - f^{(r)}(\xi)]}. \tag{5}$$

Da quest'elegante espressione del resto segue immediatamente che

$$|R_{2n}^*| \leq \frac{\varkappa n\omega^{r+1}}{2^r - 1}\Omega^{(r)}. \tag{6}$$

In particolare, nel caso della formula di SIMPSON, per cui è $r = 4$, con le notazioni precedenti, si ha

$$I = A_{4m} + \frac{1}{15}(A_{4m} - A_{2m}) + R_{4m}^* \tag{7}$$

con

$$R_{4m}^* = -\frac{m\omega^5}{1350}[f^{\mathrm{IV}}(\xi^*) - f^{\mathrm{IV}}(\xi)] \tag{5'}$$

e

$$|R_{4m}^*| \leq \frac{m\omega^5}{1350}\Omega^{(4)}. \tag{6'}$$

[1] Ricordiamo che l'*oscillazione* di una funzione $\varphi(x)$ in un intervallo è, nel tempo stesso, la differenza fra i due estremi di φ nell'intervallo e l'estremo superiore di $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|$, essendo x_1 e x_2 due punti qualsiasi dell'intervallo.