Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Speranza

Sulle trasformazioni che posseggono un gruppo di coppie di corrispondenze in sè. Nota II.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.1, p. 10–27.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_1_10_0>

Sulle trasformazioni che posseggono un gruppo di coppie di corrispondenze in sè.

Nota II (*) di FRANCESCO SPERANZA (a Bologna)

Sunto. *Questa Nota è la continuazione di un'altra, dallo stesso titolo, apparsa nel volume precedente di questo Bollettino.*

Summary. - *This paper continues another one, with the same title, published in last volume of this Bulletin.*

§ 2.

6. In questo paragrafo si determineranno le trasformazioni fra due piani π, $\bar{\pi}$ con un gruppo di coppie di movimenti in sè; tutti gli enti qui considerati si intendono rappresentati a meno di movimenti. I gruppi ∞^1 di movimenti sono quello delle traslazioni con direzione fissa

$$\left\{\begin{array}{l} x = x' + \lambda \\ y = y' \end{array}\right. \tag{6}$$

le cui traiettorie sono rette parallele, e le rotazioni intorno ad un punto fisso (che, in coordinate polari, si possono rappresentare così

$$\left\{\begin{array}{l} \rho = \rho' \\ \theta = \theta' + \lambda), \end{array}\right. \tag{7}$$

le cui traiettorie sono circonferenze concentriche. Non esistono invece, com'è facile constatare, insiemi ∞^2 di movimenti che operino intransitivamente sul piano punteggiato. Si avranno allora tre tipi di trasformazioni con un gruppo di coppie di movimenti in sè:

I. g e $\bar{g}$ sono del tipo (6).

Si assumano in π, $\bar{\pi}$ due curve $\mathcal{C}$, $\bar{\mathcal{C}}$ arbitrarie. purchè non

(*) La numerazione prosegue quella della Nota I. (Cfr. Boll. U.M.I. (3) **13**, 486-496 (1958)).

siano traiettorie di g, $\bar{g}$. Siano esse

$$x = 0 \qquad \text{e} \qquad \bar{x} = f(\bar{y})$$

(una si può sempre scegliere in modo particolare, senza ledere la generalità della T). Sia poi $\bar{y} = \varphi(y)$ un'arbitraria corrispondenza Γ fra di esse. Le trasformazioni di $g(\bar{g})$ trasformano un punto generico, di ordinata $u(\bar{u})$, di $\mathfrak{C}(\bar{\mathfrak{C}})$ nel punto

$$(8) \qquad \begin{cases} x = \lambda \\ y = u \end{cases} \qquad \left(\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{u}) + \bar{\lambda} \\ \bar{y} = \bar{u} \end{cases} \right).$$

Un isomorfismo fra i due gruppi, e la corrispondenza Γ, sono rappresentati rispettivamente da

$$(9) \qquad \bar{\lambda} = a\lambda \qquad \bar{u} = \varphi(u).$$

Eliminando u, $\bar{u}$, λ, $\bar{\lambda}$ fra le (8), (9) si ottengono le T cercate:

$$(10) \qquad \begin{cases} \bar{x} = \psi(y) + ax \\ \bar{y} = \varphi(y) \end{cases} \qquad [\psi(y) \equiv f(\varphi(y))] \text{ (9)}.$$

II. g e $\bar{g}$ sono del tipo (7).

Procedendo come nel caso precedente, si trovano le equazioni

$$(11) \qquad \begin{cases} \bar{\theta} = \psi(\rho) + a\theta \\ \bar{\rho} = \varphi(\rho) \end{cases}$$

$\mathfrak{J}$ è sempre rappresentato dalla (9_1).

III. g è del tipo (6), e $\bar{g}$ del tipo (7).

(9) Nel seguito del lavoro, con f, φ, ψ, χ si indicheranno delle funzioni arbitrarie, con a, $\bar{a}$, c, α, p, q, ... delle costanti arbitrarie. Va notato che le funzioni che si considerano possono essere a più valori, ed in tal caso le T rappresentate non sono più univoche.

Procedendo come sopra si ottengono le equazioni

$$(12)\qquad \begin{cases} \theta = ax + \psi(y) \\ \rho = \varphi(y). \end{cases}$$

7. In questo numero determiniamo le trasformazioni puntuali fra piani sovrapposti che ammettono un gruppo g di movimenti in sè.

I. g è del tipo (6).

Assumiamo in π due curve, ad esempio

$$x = 0 \qquad \text{e} \qquad \bar{x} = f(\bar{y})$$

ed una corrispondenza Γ fra di esse: $\bar{u} = \varphi(u)$, dove u, $\bar{u}$ sono le ordinate di due punti P, $\bar{P}$ corrispondenti in Γ. I movimenti di g fanno corrispondere a P, $\bar{P}$ i punti

$$(13)\qquad \begin{cases} x = \lambda \\ y = u \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x} = \bar{u} + \lambda \\ \bar{y} = f(\bar{u}). \end{cases}$$

Eliminando λ, u, $\bar{u}$, si ottengono le equazioni delle trasformazioni cercate:

$$(14)\qquad \begin{cases} \bar{x} = \varphi(y) + x \\ \bar{y} = \psi(y). \end{cases}$$

II. g è del tipo (7).

Procedendo come sopra, si ottengono le equazioni [10]:

$$(15)\qquad \begin{cases} \bar{\theta} = \varphi(\rho) + \theta \\ \bar{\rho} = \psi(\rho). \end{cases}$$

8. Con il metodo qui seguito si dimostra che:

[10] Alle trasformazioni qui considerate si possono applicare le considerazioni dell'Osservazione del n. 4: basta assumere come parametro sulle rette l'ascissa, e sui cerchi l'angolo al centro. Le corrispondenze Σ fra curve $\mathfrak{F}$, $\bar{\mathfrak{F}}$ sono *similitudini*, che si riducono ad *uguaglianze* nel caso di trasformazioni fra piani sovrapposti.

Le sole trasformazioni puntuali fra piani che ammettono un gruppo transitivo reale di coppie di movimenti in sè sono le affinità.

Infatti il solo sottogruppo transitivo reale del gruppo dei movimenti è quello delle traslazioni:

$$x = x' + \lambda \qquad y = y' + \mu.$$

Occorre quindi (cfr. n. 2) fissare nei piani π, $\bar{\pi}$ due punti arbitrari (ad esempio le origini) ed un'isomorfismo fra due gruppi di traslazioni; esso sarà del tipo:

$$\bar{\lambda} = a_{11}\lambda + a_{12}\mu, \qquad \bar{\mu} = a_{21}\lambda + a_{22}\mu.$$

Una generica traslazione di $\pi(\bar{\pi})$ muta l'origine nel punto

$$x = \lambda, \quad y = \mu \qquad (\bar{x} = \bar{\lambda}, \quad \bar{y} = \bar{\mu}).$$

Eliminando λ, $\bar{\lambda}$, μ, $\bar{\mu}$ si ottengono le equazioni d'una generica affinità:

$$\bar{x} = a_{11}x + a_{12}y \qquad \bar{y} = a_{21}x + a_{22}y \qquad \text{(c. v. d.)}.$$

Fra le affinità vanno poi ricercate, manifestamente, le trasformazioni che sono mutate in sè dai due gruppi totali dei movimenti; imponendo che un'affinità goda di tale proprietà, (e per far ciò basta applicare alle sue equazioni due generici movimenti, ed imporre che le equazioni ottenute coincidano con quelle iniziali) si trova che deve trattarsi di una similitudine; *le trasformazioni fra piani distinti che sono mutate in sè dai due gruppi totali dei movimenti sono le similitudini* ([11]).

§ 3.

9. In questo paragrafo si determinano le trasformazioni fra piani che ammettono un gruppo di coppie di similitudini dirette

([11]) Le trasformazioni fra piani sovrapposti che sono mutate in sè da un gruppo reale ∞^2 di movimenti sono le traslazioni (cfr. più avanti le (90)); non esistono invece trasformazioni fra piani sovrapposti che ammettono il gruppo totale dei movimenti in sè (infatti quest'ultimo è isomorfo al gruppo (28') del n. 11, che, essendo un caso particolare del gruppo (111) del n. 18, non trasforma in sè che l'identità).

reali in sè; tutti gli enti qui considerati si intendono rappresentati a meno di similitudini.

I gruppi intransitivi di similitudini dirette reali sono i gruppi (6), (7) *ed inoltre il gruppo*

$$(16) \qquad \begin{cases} \rho = \lambda\rho' \\ \theta = \theta' + a\lg\lambda \end{cases}$$

le cui traiettorie sono *spirali logaritmiche:* $\theta = lg(k\rho^{a})]$.

Infatti, i gruppi intransitivi di omografie sono costituiti da [12]:
a) se ∞^1:

1) omologie con centro fisso; queste sono similitudini dirette reali quando l'asse è improprio, ed in tal caso si tratta del *gruppo delle omotetie con centro fisso* (se non speciali). e del *gruppo delle traslazioni con direzione fissa* (se speciali);

2) omografie paraboliche, che non possono essere similitudini dirette reali;

3) omografie generali con tre punti fissi, dei quali uno (O) sarà proprio; queste si possono pensare come prodotto di una rotazione intorno ad O e d'un'omotetia di centro O:

$$\rho = \lambda' \qquad \theta = \theta' + \alpha,$$

dove α e λ saranno legati da un'opportuna relazione, che determiniamo: se $\lambda = \text{cost.}$, è necessariamente $\lambda = 1$, e si ha *il gruppo delle rotazioni intorno ad* O; altrimenti, posto $\alpha = \alpha(\lambda)$, dovrà essere

$$\alpha(\lambda \cdot \mu) = \alpha(\lambda) + \alpha(\mu), \qquad \alpha(1) = 0,$$

affinchè il prodotto di due trasformazioni del gruppo, nonchè la identità, facciano parte del gruppo. Allora appartiene al gruppo l'inversa di ogni sua trasformazione: infatti $\alpha\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\alpha(\lambda)$. Come si è visto nel n. 5, si ha

$$\alpha(\lambda) \equiv a\lg\lambda \qquad (a \text{ costante}).$$

Si ottengono così le (16), che comprendono, per $a = 0$, il gruppo delle omotetie.

(12) Cfr W. F. Meyer, *Tabellen von endlichen continuirliche transformationsgruppen*, « Math. Papers read at Chicago Int. Congress 1893 », Mac Millan, New York (1896), pp. 187-200.

b) Non vi sono gruppi intransitivi ∞^2 di similitudini, in quanto gli analoghi gruppi di omografie sono costituiti da omologie con centro fisso, fra le quali vi sono al più ∞^1 similitudini (c. v. d.).

Oltre ai tipi (10), (11), (12) si hanno quindi tre tipi di trasformazioni fra piani distinti per cui g e $\bar{g}$ sono similitudini:

I. g e $\bar{g}$ sono del tipo (16).

Consideriamo due curve $\mathfrak{C}$, $\bar{\mathfrak{C}}$

$$\rho = 1; \qquad \bar{\rho} = f(\bar{\theta}),$$

una corrispondenza Γ fra i loro punti (u, $\bar{u}$ sono le anomalie di punti corrispondenti)

$$\bar{u} = \varphi(u),$$

ed un'isomorfismo $\mathfrak{J}$ fra i due gruppi (entrambi del I tipo):

$$\bar{\lambda} = \lambda^c.$$

Le similitudini di g, $\bar{g}$ trasformano i punti di $\mathfrak{C}$ nei punti

$$\begin{cases} \rho = \lambda \\ \theta = u + a\lg\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\rho} = f(\bar{u}) \cdot \bar{\lambda} \\ \bar{\theta} = \bar{u} + a\lg\bar{\lambda}. \end{cases}$$

Eliminando λ, $\bar{\lambda}$, u, $\bar{u}$ si ha $[\psi(u) \equiv f(\varphi(u))]$:

$$(17) \qquad \begin{cases} \bar{\theta} = \varphi(\theta - a\lg\rho) + \lg\rho^{ac} \\ \bar{\rho} = \psi(\theta - a\lg\rho) \cdot \rho^c. \end{cases}$$

II. g è del tipo (6), e $\bar{g}$ del tipo (16).

L'equazione di $\mathfrak{J}$ sarà

$$\bar{\lambda} = e^{c\lambda}$$

in quanto g è additivo e $\bar{g}$ moltiplicativo.

Si trovano così le trasformazioni:

$$(18) \qquad \begin{cases} \bar{\rho} = \varphi(y) \cdot e^{cx} \\ \bar{\theta} = \psi(y) + acx. \end{cases}$$

III. g è del tipo (7), e $\bar{g}$ del tipo (16).

Procedendo come sopra, si trovano le seguenti equazioni

$$(19)\qquad \begin{cases} \bar{\rho} = \varphi(y) \cdot e^{c\theta} \\ \bar{\theta} = \psi(y) + ac\theta. \end{cases}$$

Infine le trasformazioni fra piani sovrapposti che ammettono un gruppo intransitivo di similitudini in sè sono le (14), (15) e le

$$(20)\qquad \begin{cases} \bar{\rho} = \psi(\theta - a\lg\rho) \cdot \rho \\ \bar{\theta} = \varphi(\theta - a\lg\rho) + a\lg\rho, \end{cases}$$

che si ottengono come le (17), ponendo però $\bar{a} = a$ e $c = 1$ (in quanto $\mathfrak{T} \equiv \bar{\mathfrak{T}}$ e $\mathfrak{I}$ è l'identità) [13].

10. In questo numero si determinano le trasformazioni fra piani che ammettono un gruppo transitivo di coppie di similitudini dirette reali in sè. A tale scopo determiniamo anzitutto i gruppi transitivi ∞^2 di similitudini dirette reali; essi sono:

[13] Per le trasformazioni trovate si verificano facilmente le proprietà di cui all'Osservazione del n. 4. Sulle spirali logaritmiche e sulle circonferenze conviene qui prendere come parametro l'*angolo di contingenza* $\xi = \int \frac{ds}{R} + \xi_0$ (dove s, R sono rispettivamente l'arco e il raggio di curvatura metrici: cfr. E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*, Gauthier Villars, Paris (1951), p. 218). Per le traiettorie del gruppo (16) si ha $\frac{1}{R} = \frac{a}{\rho\sqrt{1+a^2}}$ (tali curve sono quindi fra di loro equivalenti rispetto al gruppo dei movimenti. Con la trasformazione

$$X = x - iy, \qquad Y = x + iy$$

si constata che sono equivalenti, dal punto di vista affine, alla

$$Y = X^{i}).$$

Quindi si ha

$$\xi = a\lg\rho + \xi_0.$$

Nel caso $\pi \equiv \bar{\pi}$, quando le curve $\mathfrak{F}$ sono rette, si verifica poi subito che le Σ sono similitudini.

1) *il gruppo delle traslazioni;*

2) *il gruppo delle roto-omotetie di dato centro O:* in un sistema di coordinate polari di centro O, esse sono rappresentate da:

$$\rho = \lambda\rho' \qquad \theta = \theta' + \mu;$$

3) *Il gruppo delle omotetie con centro variabile su una retta:*

$$x = \lambda x' + \mu \qquad y = \lambda y'.$$

Infatti fra i gruppi transitivi ∞^2 di omografie piane possiamo escludere quelli costituiti da omografie paraboliche, nonchè quelli che non posseggono (almeno) due punti uniti fissi, e quelli che posseggono due punti uniti fissi U, V ed un terzo variabile su una retta uscente da U, in quanto le relative omografie non possono mai essere similitudini dirette reali. Restano allora:

il gruppo delle omologie speciali con asse fisso; esse sono similitudini dirette allorchè l'asse è improprio, e si ha così il gruppo delle traslazioni:

il gruppo delle omologie non speciali il cui centro descrive una retta; se esse sono similitudini, diventano omotetie;

il gruppo delle omografie con tre punti uniti fissi, dei quali uno (O) è proprio; se esse sono similitudini, costituiscono il gruppo delle roto-omotetie di centro O (c. v. d.).

Scriviamo allora le equazioni dei tre gruppi nella forma:

traslazioni:

$$x = x' + \lambda, \qquad y = y' + \mu \tag{21}$$

roto-omotetie:

$$\rho = e^{\lambda}\rho', \qquad \theta = \theta' + \mu \tag{22}$$

omotetie:

$$x = \lambda x' + \mu \qquad y = \lambda y'. \tag{23}$$

I primi due gruppi sono isomorfi; la *legge di composizione* è infatti additiva per entrambi. Il terzo gruppo è invece isomorfo a quello delle sostituzioni lineari intere su una variabile, e quindi non è isomorfo ai due precedenti.

Ragionando come nel n. 5 (Osservazione), si hanno i quattro seguenti tipi di trasformazioni con ∞^2 similitudini in sè:

I. g e g sono del tipo (21):

$$x = ax + by. \qquad \bar{y} = cx + dy \qquad \text{(affinità)} \tag{24}$$

II. g e $\bar{g}$ sono del tipo (22):

$$\bar{\rho} = \rho^a e^{b\theta}, \qquad \bar{\theta} = c \lg \rho + d\theta \tag{25}$$

III. g è del tipo (21), e $\bar{g}$ del tipo (22):

$$\bar{\rho} = e^{ax+by} \qquad \bar{\theta} = cx + dy. \tag{26}$$

IV. g e $\bar{g}$ sono del tipo (23).

Assumendo in π, $\bar{\pi}$ due punti generici, ad esempio $P(0, 1)$, $\bar{P}(0, 1)$, si hanno le seguenti equazioni

$$\bar{x} = ax + by - b, \qquad \bar{y} = y \qquad \text{(affinità} \tag{27}$$

11. Passiamo ora alla determinazione delle trasformazioni che ammettono un gruppo ∞^3 di coppie di similitudini dirette reali in sè. A tale scopo, si osservi che i gruppi ∞^3 di similitudini dirette reali sono:

il gruppo dei movimenti;

il gruppo delle omotetie.

Infatti, dalla citata opera di W. F. MEYER si deduce che i soli gruppi transitivi ∞^3 d'omografie, che, a norma delle considerazioni precedenti, possono essere costituiti da similitudini dirette reali sono, a meno d'omografie

$$x = \lambda^{\alpha-1} x' + \mu \qquad y = \lambda^{\alpha} y' + \nu \tag{28}$$

$$x = \lambda x' + \mu \qquad y = \lambda y' + \nu. \tag{29}$$

Se al gruppo (28) si applica la trasformazione (affinità)

$$\xi = y + ix \qquad \eta = y - ix, \tag{30}$$

si ottengono le equazioni di una similitudine diretta, qualora ξ, η

si considerino come coordinate cartesiane ortogonali. Affinchè tale similitudine sia reale, le quantità $\lambda^{\alpha-1}$ e λ^{γ} devono essere coniugate, e quindi

$$\alpha = \frac{1}{2}.$$

Posto allora

$$\rho = \lambda^{-\frac{1}{2}},$$

si ha il gruppo

$$x = \rho x' + \mu, \qquad y = \rho^{-1} y' + \nu, \tag{28'}$$

che rappresenta appunto il gruppo dei movimenti. in quelle coordinate x, y che sono legate alle coordinate cartesiane ortogonali ξ, η dalle (30).

In quanto alle omologie (29), esse sono similitudini se il loro asse è improprio, e quindi se sono omotetie.

Entrambi i gruppi ammettono il sottogruppo ∞^2 (21); le trasformazioni che ammettono un gruppo ∞^3 di coppie di similitudini in sè vanno quindi ricercate fra le affinità. Come s'è già visto (cfr. n. 8) quelle che sono mutate in sè dal gruppo totale dei movimenti sono le similitudini; si verifica poi subito che quelle che sono mutate in sè dal gruppo delle omotetie sono tutte (e sole) le affinità.

Si osservi poi che il gruppo delle omotetie e quello dei movimenti non sono isomorfi ([14]). Non esistono perciò trasformazioni

([14]) Infatti, indicata con Ω_a una trasformazione del gruppo (29), la trasformazione infinitesima $\Omega_a^{-1}\Omega_{a+da}$ è rappresentata da

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x'} x' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'\right)\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{d\mu}{\lambda} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{d\nu}{\lambda}$$

e quindi le componenti relative del riferimento di detto gruppo sono

$$\omega_1 = \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \omega_2 = \frac{d\mu}{\lambda}, \quad \omega_3 = \frac{d\nu}{\lambda}$$

con le equazioni di struttura

$$[d\omega_1] = 0, \quad [d\omega_2] = -[\omega_1\omega_2]. \quad [d\omega_3] = -[\omega_1\omega_3].$$

Per il gruppo (28′), si ha invece

$$\delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial x'} x' - \frac{\partial f}{\partial y'} y'\right)\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot \frac{d\mu}{\lambda} + \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \lambda d\nu.$$

Le componenti relative sono quindi

$$\omega_1 = \frac{d\lambda}{\lambda}, \qquad \omega_2 = \frac{d\mu}{\lambda}, \qquad \omega_3 = \lambda d\nu$$

per le quali g e g siano l'uno il gruppo delle omotetie, e l'altro il gruppo dei movimenti.

Si noti infine che se una trasformazione T è mutata in sè da un gruppo di coppie di similitudini, che costituiscono in ciascun piano il gruppo totale delle similitudini, essa va ricercata fra quelle che ammettono due gruppi di movimenti in sè, cioè fra le similitudini; d'altronde, è manifesto che una qualunque similitudine fra i due piani è mutata in sè da una coppia di similitudini. Concludendo: *le trasformazioni che ammettono i due gruppi totali delle similitudini in sè sono tutte e sole le similitudini.*

12. I *gruppi reciproci* dei gruppi transitivi di similitudini (vale a dire, i gruppi di trasformazioni fra piani sovrapposti che ammettono un gruppo di similitudini in sè) sono:

per i gruppi (21), (22), i gruppi stessi;

per il gruppo (23):

$$\bar{x} = py + x \qquad \bar{y} = qy$$

(cioè il gruppo delle affinità omologiche di asse fisso).

Non esistono poi trasformazioni, oltre l'identità, che ammettono un gruppo ∞^3 di similitudini in sè: questi infatti rientrano nei tipi (101), (102) del n. 17. A maggior ragione non si hanno trasformazioni, non identiche, mutate in sè dal gruppo totale delle similitudini.

§ 4.

13. In questo paragrafo si determinano le trasformazioni che ammettono un gruppo intransitivo di coppie d'omografie in sè: tutti gli enti considerati si intenderanno rappresentati a meno d'omografie. I gruppi intransitivi d'omografie nel piano sono ([15]):

con le equazioni di struttura

$$[d\omega_1] = 0, \qquad [d\omega_2] = -[\omega_1\omega_2], \qquad [d\omega_3] = [\omega_1\omega_3].$$

I due gruppi non sono quindi isomorfi (per il simbolismo qui usato, e per i teoremi applicati, cfr. E. CARTAN, op. cit., §§ 70, 71 e 164).

([15]) Cfr. W. F. MEYER, op. cit..

i gruppi ∞^1

$$(31)\quad \begin{cases} x = \lambda x' \\ y = \lambda^\alpha y' \end{cases} \qquad (32)\quad \begin{cases} x = x' + \lambda \\ y = e^\lambda y' \end{cases}$$

$$(33)\quad \begin{cases} x = x' + \lambda \\ y = y' \end{cases} \qquad (34)\quad \begin{cases} x = x' + \lambda \\ y = \lambda x' + y' + \frac{\lambda^2}{2} \end{cases}$$

ed i gruppi ∞^2 e ∞^3

$$(35)\quad \begin{cases} x = \lambda x' + \mu \\ y = y' \end{cases} \qquad (36)\quad \begin{cases} x = x' + \lambda y' + \mu \\ y = y' \end{cases} \qquad (37)\quad \begin{cases} x = \lambda x' + \mu y' + \nu \\ y = y'. \end{cases}$$

Cominciamo a cercare le trasformazioni mutate in sè da un gruppo di ∞^1 coppie di omografie: se ne avranno evidentemente dieci tipi.

I. g e $\bar{g}$ sono del tipo (31).

Assegniamo una corrispondenza Γ fra le curve $x = 1$, $\bar{x} = f(\bar{y})$:

$$\bar{u} = \varphi(u) \qquad (u,\ \bar{u} \text{ ordinate di punti corrispondenti}).$$

I gruppi g, $\bar{g}$ trasformano i punti delle curve suddette nei punti

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = u\lambda^\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x} = \bar{\lambda} f(\bar{u}) \\ \bar{y} = \bar{u}\,\bar{\lambda}^{\bar{\alpha}} \end{cases}$$

mentre $\mathfrak{g}$ sarà rappresentato dalla

$$\bar{\lambda} = \lambda^c.$$

Dalle relazioni scritte si ottengono le equazioni

$$(38)\quad \begin{cases} \bar{x} = \psi\left(\dfrac{y}{x^\alpha}\right) x^c \\ \bar{y} = \varphi\left(\dfrac{y}{x^\alpha}\right) x^{\bar{\alpha} c} \end{cases} \qquad (\psi = f(\varphi)).$$

II. g e $\bar{g}$ sono del tipo (32).

Procedendo in modo analogo al caso precedente (qui e nei due casi successivi $\mathfrak{I}$ è rappresentato dalla

$$\bar{\lambda} = a\lambda),$$

si trovano le equazioni

$$(39) \qquad \begin{cases} \bar{x} = ax + \psi\left(\dfrac{y}{e^x}\right) \\ \bar{y} = e^{ax} \cdot \varphi\left(\dfrac{y}{e^x}\right) \end{cases}$$

III. g e $\bar{g}$ sono del tipo (33).

Procedendo come sopra, si hanno le equazioni [16]

$$(40) \qquad \begin{cases} \bar{x} = ax + \psi(y) \\ \bar{y} = \varphi(y). \end{cases}$$

IV. g e $\bar{g}$ sono del tipo (34). Si hanno le equazioni [17]

$$(41) \qquad \begin{cases} \bar{x} = ax + \psi\left(y - \dfrac{x^2}{2}\right) \\ \bar{y} = \dfrac{a^2x^2}{2} + ax \cdot \psi\left(y - \dfrac{x^2}{2}\right) + \varphi\left(y - \dfrac{x^2}{2}\right). \end{cases}$$

V. g è del tipo (32), $\bar{g}$ del tipo (31).

(In questo caso, e nei due successivi, $\mathfrak{I}$ è rappresentato da

$$\bar{\lambda} = e^{c\lambda}).$$

Si ottengono le seguenti equazioni:

$$(42) \qquad \begin{cases} \bar{x} = \psi\left(\dfrac{y}{e^x}\right) \cdot e^{cx} \\ \bar{y} = \varphi\left(\dfrac{y}{e^x}\right) . e^{\bar{x}cx} \end{cases}$$

([16]) T è di 2ª o 3ª specie, e le corrispondenze Σ fra le rette $\mathfrak{F}$, $\bar{\mathfrak{F}}$ sono proiettività.

([17]) T subordina fra le $\mathfrak{F}$. $\bar{\mathfrak{F}}$ una proiettività.

VI. g è del tipo (33), g del tipo (31). Si hanno le trasformazioni

$$
(43) \qquad \begin{cases} \bar{x} = \psi(y) \cdot e^{cx} \\ \bar{y} = \varphi(y) \cdot e^{\bar{\chi} c x} \end{cases}
$$

VII. g è del tipo (34), $\bar{g}$ del tipo (31). Si hanno le trasformazioni

$$
(44) \qquad \begin{cases} \bar{x} = \psi\left(y - \frac{x^2}{2}\right) \cdot e^{cx} \\ \bar{y} = \varphi\left(y - \frac{x^2}{2}\right) \cdot e^{\bar{\chi} c x} \end{cases}
$$

VIII. g è del tipo (33). $\bar{g}$ del tipo (32). (Negli ultimi tre casi $\mathfrak{J}$ è della forma

$$
\bar{\lambda} = a\lambda).
$$

In questo caso si hanno le:

$$
(45) \qquad \begin{cases} \bar{x} = ax + \psi(y) \\ y = \varphi(y) \cdot e^{ax} . \end{cases}
$$

IX. g è del tipo (34), $\bar{g}$ del tipo (32). Si hanno le trasformazioni

$$
(46) \qquad \begin{cases} \bar{x} = ax + \psi\left(y - \frac{x^2}{2}\right) \\ \bar{y} = \varphi\left(y - \frac{x^2}{2}\right) \cdot e^{ax} . \end{cases}
$$

X. g è del tipo (33), $\bar{g}$ del tipo (34).

Si hanno le trasformazioni ([18])

$$
(47) \qquad \begin{cases} \bar{x} = ax + \psi(y) \\ \bar{y} = \frac{a^2 x^2}{2} + ax \cdot \psi(y) + \varphi(y) . \end{cases}
$$

([18]) Anche in questo caso T subordina fra le $\mathfrak{F}$, $\bar{\mathfrak{F}}$ una proiettività.

Si noti che, in ognuno dei casi considerati, le curve di KLEIN-LIE di uno stesso sistema $\{ \mathfrak{F} \}$ siano proiettivamente equivalenti; si possono applicare quindi le considerazioni del n. 4.

14. In questo numero determiniamo le trasformazioni che ammettono un gruppo di coppie d'omografie in sè, a due o tre parametri. Si è visto che, in tal caso, i gruppi g, $\bar{g}$ sono costituiti da omologie. *Gli assi di tali omologie si corrispondono in* T: infatti, se $a(\bar{a})$ è l'asse di una delle $\Omega(\bar{\Omega})$, ed $A(\bar{A})$ un suo punto generico

$$TA = \bar{\Omega} T \Omega^{-1} A = \Omega T A = \bar{\Omega} \bar{A} = \bar{A} \qquad \text{(c. v. d.)}.$$

Da questi fatti si traggono subito le seguenti conseguenze:

I *I gruppi* g, $\bar{\text{g}}$ *sono dello stesso tipo*:

infatti non possono essere uno ∞^2 e l'altro ∞^3, nè l'uno del tipo (35) e l'altro del tipo (36), essendo il primo isomorfo al gruppo delle sostituzioni lineari intere sopra una variabile, e l'altro abeliano e quindi isomorfo al gruppo delle traslazioni.

II. *Se i due gruppi* g, $\bar{\text{g}}$ *sono del tipo* (35) [(36)], **T** *muta almeno due fasci* [*un fascio*] *di rette in due fasci* [*un fascio*] *di rette.*

III. *Se* **T** *ammette due gruppi intransitivi* ∞^3 *di omografie in sè, è certo un'omografia.*

Infatti, se g, $\bar{g}$ sono del tipo (37), gli assi delle $\Omega(\bar{\Omega})$ sono due rette qualunque del piano; T fa allora corrispondere, ad una retta qualunque, una retta, ed è quindi un'omografia.

Torniamo ora alle trasformazioni che ammettono due gruppi intransitivi ∞^2 di omografie in sè; dimostriamo che esse sono:

I. *Le trasformazioni di 2ª specie, le cui curve caratteristiche sono, in ciascun piano, rette di due fasci*; esse sono mutate in sè da tutte le (coppie di) omologie aventi centro nel centro del fascio delle caratteristiche doppie, e per asse una qualunque caratteristica semplice;

II. *Le trasformazioni di 3ª specie, le cui curve caratteristiche sono, in ciascun piano, rette d'un fascio, la corrispondenza fra i due fasci essendo una proiettività*; esse sono mutate in sè dalle coppie di omologie speciali aventi centro nel centro del fascio delle caratteristiche.

I. Le trasformazioni che ammettono due gruppi del tipo (35) di omografie in sè mutano i fasci $x = \text{cost.}$, $y = \text{cost.}$ nei fasci $\bar{x} = \text{cost.}$, $\bar{y} = \text{cost.}$; d'altra parte esse rientrano necessariamente fra le trasformazioni mutate in sè da un gruppo di coppie di omografie, appartenenti a due suoi sottogruppi: ad esempio fra le (40), che ammettono due gruppi del tipo (33) d'omografie in sè. Per l'osservazione fatta più sopra, nelle (40) si dovrà porre

$$\psi = \text{cost.},$$

ottenendo così le trasformazioni

$$(48)\qquad \begin{cases} \bar{x} = ax + k \\ \bar{y} = \varphi(y); \end{cases}$$

se poi a queste s'applicano due gruppi del tipo (35), con la relazione d'isomorfismo

$$\bar{\lambda} = \lambda \qquad \bar{\mu} = a\mu - k\lambda + k$$

si verifica che tali trasformazioni sono mutate in sè dai due gruppi. Le (48), che con un cambiamento di coordinate si possono scrivere pure

$$(48')\qquad \begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = \varphi(y) \end{cases}$$

rappresentano, a meno d'omografie, tutte le trasformazioni di 2^a specie le cui caratteristiche sono, in ciascun piano, rette di due fasci ([19]) (c. v. d.).

II. Anche le trasformazioni che ammettono un gruppo di coppie d'omografie, costituito da due gruppi del tipo (36), possono ricercarsi fra le (40), in quanto anche il gruppo (36) possiede il sottogruppo (33). Applichiamo quindi alle (40) due gruppi del tipo (36); si ha

$$\begin{cases} \bar{x}' + \bar{\lambda}\bar{y}' + \bar{\mu} = a(x' + \lambda y' + \mu) + \psi(y') \\ \bar{y}' = \varphi(y') \,. \end{cases}$$

Dalla prima si trae

$$(49)\qquad \bar{x}' = ax' + a\lambda y' + \psi(y') - \bar{\lambda}\varphi(y') + a\mu - \bar{\mu}.$$

Affinchè questa coincida con (40_1) dev'essere

$$a\lambda y - \bar{\lambda}\varphi(y) + a\mu - \bar{\mu} = 0$$

da cui

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{a\lambda}{\bar{\lambda}}$$

([19]) Cfr. L. Muracchini, *Sulle trasformazioni puntuali di seconda e terza specie fra piani proiettivi*, « Mem. Accad. Sci. Torino » (3) 1, 25 44 (1953), n. 6. E notevole il fatto che tali trasformazioni siano tutte applicabili in modo forte l'una sull'altra: cfr. F. Speranza, *Applicabilità proiettiva fra trasformazioni puntuali di 2^a specie*, « Boll. U. M. I. » (3) **11**, 526-537 (1956), nota ([14]); l'applicabilità è realizzata da trasformazioni dello stesso tipo. Si veda anche: M. Villa, *Applicabilità proiettiva delle superficie di 2^a specie della V_4 di Segre*, « Boll. U.M.I. » (3) **11**, 493-495 (1956).

e quindi

$$\varphi = ky + h \qquad (k,\ h \text{ costanti}).$$

Sostituendo ancora nella (49) si trova che questa può esser soddisfatta, purchè si stabilisca fra i due gruppi l'isomorfismo:

$$\bar{\lambda} = \frac{a\lambda}{k} \qquad \bar{\mu} = a\mu - \frac{ah\lambda}{k}. \tag{50}$$

Si hanno così le trasformazioni

$$\begin{cases} \bar{x} = ax + \psi(y) \\ \bar{y} = ky + h, \end{cases} \tag{51}$$

che, con un cambiamento di coordinate, si possono scrivere pure

$$\begin{cases} \bar{x} = x + \psi(y) \\ \bar{y} = y, \end{cases} \tag{51'}$$

e rappresentano, a meno d'omografie, tutte e sole le trasformazioni di 3^a specie, le cui caratteristiche sono rette d'un fascio, fra i due fasci essendo subordinata una proiettività [20].

Come nel caso I, questa caratterizzazione permette una semplice costruzione geometrica delle trasformazioni in questione. Si noti poi che, in entrambi i casi, la T subordina fra le rette $\mathfrak{F}$, $\bar{\mathfrak{F}}$ una proiettività [21].

[20] Cfr. L. MURACCHINI, op. cit. in [19], n. 9.

[21] Per un'altra caratterizzazione di queste trasformazioni, cfr. M. VILLA, *Classificazione delle trasformazioni puntuali di 3ª specie fra piani*, « Boll. U. M. I. » (3) **11**, 141-149 (1956), n. 7. Un'altra notevole proprietà di tali trasformazioni è la seguente: considerate due qualunque di esse (T, T^*), si può sempre stabilire fra di loro una corrispondenza, realizzata da due trasformazioni le cui curve caratteristiche coincidono con quelle di T, T^*. Infatti esse si possono rappresentare parametricamente con le equazioni:

$$T \begin{cases} x = u \\ y = v \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x} = u + \varphi(v) \\ \bar{y} = v \end{cases} \qquad T^* \begin{cases} x^* = u^* \\ y^* = v^* \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}^* = u^* + \psi(v^*) \\ \bar{y}^* = v^*, \end{cases}$$

Se fra di esse si dà la corrispondenza, rappresentata dalle

$$u^* = u + f(v) \qquad v^* = v,$$

si vede come le trasformazioni indotte fra i piani (x, y), (x^*, y^*) e $(\bar{x}, \bar{y})$ $(\bar{x}^*, \bar{y}^*)$ hanno le stesse curve caratteristiche di T, T^*. Per l'arbitrarietà della funzione f, la corrispondenza dipende da una funzione arbitraria di una variabile.

15. In questo numero si determinano le trasformazioni fra piani sovrapposti che ammettono un gruppo intransitivo d'omografie in sè.

Si ha:

Ogni trasformazione fra piani sovrapposti, che ammetta ∞^1 *omografie in sè, si ottiene assumendo nel piano un' arbitrario sistema* Φ *di curve di* Klein-Lie *ed assegnando:*

un' arbitraria corrispondenza Γ *fra le curve del sistema;*

una proiettività arbitraria fra ogni coppia di curve corrispondenti in Γ (i cui punti uniti coincidano con i punti base di Φ).

Infatti, procedendo come per i tipi I-IV del n. 7, si trovano le seguenti trasformazioni

$$(52)\quad \begin{cases} \bar{x} = \psi\left(\dfrac{y}{x^\alpha}\right)\cdot x \\ \bar{y} = \varphi\left(\dfrac{y}{x^\alpha}\right)\cdot y \end{cases} \qquad (53)\quad \begin{cases} \bar{x} = x + \psi\left(\dfrac{y}{e^x}\right) \\ \bar{y} = y\cdot\varphi\left(\dfrac{y}{e^x}\right) \end{cases}$$

$$(54)\quad \begin{cases} \bar{x} = x + \psi(y) \\ \bar{y} = \varphi(y) \end{cases} \qquad (55)\quad \begin{cases} \bar{x} = x + \psi\left(y - \dfrac{x^2}{2}\right) \\ \bar{y} = y + x\cdot\psi\left(y - \dfrac{x^2}{2}\right) + \varphi\left(y - \dfrac{x^2}{2}\right) \end{cases}$$

Se le curve $\mathfrak{F}$ (di Klein-Lie) non sono nè coniche nè rette, la corrispondenza Σ indotta fra di esse è una proiettività per quanto s'è dimostrato nel n. 4, (Oss.); se si tratta di coniche o di rette, la proprietà si verifica immediatamente sulle equazioni trovate. Nel caso, infine, che il gruppo g sia ∞^2 si ottengono due tipi di trasformazioni:

$$(56)\quad \begin{cases} \bar{x} = x \\ \bar{y} = f(y) \end{cases} \qquad (57)\quad \begin{cases} \bar{x} = x + \varphi(y) \\ \bar{y} = y. \end{cases}$$

Le (56) *sono caratterizzate dal possedere un fascio di rette unito, ed un' altro di rette unite.* Le Ω sono le omologie con centro nel centro del primo fascio, ed asse in una retta del secondo.

Le (57) sono quelle trasformazioni che *posseggono un fascio di rette unite, subordinando, su ogni retta, una proiettività parabolica, in cui è unito il centro del fascio.* Esse sono mutate in sè dalle omologie speciali il cui centro è il centro del fascio.