UMI

Recensioni.

* Luigi Bianchi, Opere, Vol. VIII, Classi speciali di superficie, Edizioni Cremonese, Roma 1958 (L. Muracchini)
* F. Severi, Il teorema di Riemann-Roch per curve, superficie, varietà, Springer-Verlag, Berlin, 1958 (Alfredo Franchetta)
* B. Segre, Forme differenziali e loro integrali, Docet, Roma, 1956 (Leonard Roth)
* G. Vranceanu, Leçon de Géometrie différentielle, Ed. de l'Ac. de la Rep. Pop. Roumaine, Bucarest, 1957 (Maria Pastori)
* C. Böhm, "INTINT". Programmazione indiretta per calcolatrici elettroniche, Cremonese, Roma, 1958 (Francesco G. Tricomi)
* L. Schwartz, Problèmes mixtes pour l'equation des ondes, Secrétariat mathématique, Paris, 1955/1956 (Giovanni Prodi)
* A. P. Norden, Elementare Einfürung in die Lobatschewskische Geometrie, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958 (Carlo Felice Manara)
* N. M. Günter, R. O. Kusmin, Aufgabensammlung zur höheren Mathematik, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957 (Luigi Muracchini)
* L. Levin, Dilogarithms and associated functions, Macdonald & Co., London, 1958 (Luigi Gatteschi)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.1, p. 119–129.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_1_119_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

RECENSIONI

LUIGI BIANCHI, *Opere*, vol. VIII, *Classi speciali di superficie*, pp. 395, Ed. Cremonese, Roma, 1958, L. 3.500.

Nel quadro dell'ampio piano di pubblicazione di Opere di Grandi matematici italiani, che l' Unione Matematica Italiana sta attuando con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, si avvicina ormai ad essere compiuta la parte relativa all'opera di Luigi Bianchi, prevista in undici volumi. Appare ora infatti il volume ottavo « Classi speciali di superficie » curato e corredato di una introduzione da M. Villa; anche i successivi volumi sono già pronti per la stampa.

Nel presente volume ottavo appaiono ventiquattro lavori del Bianchi dedicati allo studio di particolari tipi o classi di superficie: segnatamente superficie pseudosferiche, minime, isoterme. A quelle classi particolari di superficie il Bianchi venne condotto nel corso delle Sue ricerche in modi svariati: talvolta per il desiderio di completare qualche ricerca mediante la trattazione di un caso eccezionale; talvolta per il desiderio di illustrare in modo concreto qualche risultato di carattere generale attraverso la trattazione di un caso particolare condotta più a fondo, trattazione che permette di arricchire la conoscenza della classe di superficie esaminata stabilendo anche collegamenti fra le varie proprietà di cui gode. Ma spesso anche il Bianchi procede per il gusto della ricerca e dello studio di problemi particolari.

Come rileva il Villa nella sua introduzione al volume, ricca di osservazioni acute e originali, i lavori raccolti nel volume ottavo si possono distribuire in due gruppi: il primo gruppo di dodici lavori che riguardano strettamente superficie dello spazio euclideo ordinario; il secondo gruppo anch'esso consta di dodici lavori che riguardano invece superficie immerse in uno spazio a curvatura costante (ellittico o iperbolico). I risultati però sono qualche volta applicati in definitiva a problemi riguardanti le superficie dello spazio ordinario. Ed ecco in breve gli argomenti dei predetti lavori. In primo luogo si hanno tre lavori riguardanti classi di superficie che risultano divise in parallelogrammi infinitesimi equivalenti da un doppio sistema di traiettorie isogonali delle linee di curvatura. Vengono esaminate certe classi di siffatte superficie che si presentano come eccezionali e sono dotate anche di altre proprietà. Seguono poi quattro memorie e note sulle superficie pseudosferiche ottenute col metodo di Weingarten dalle superficie applicabili sopra certe superficie di rotazione. In tali lavori il Bianchi studia anche certe famiglie di Lamé composte con superficie delle classi prima indicate. Seguono lavori sulle trasformazioni di Darboux delle superficie ad area minima e su una classe di superficie contenenti un doppio sistema di curve di Bertrand. Due memorie sono dedicate a questioni relative alle congruenze pseudo-sferiche e vi si tratta il problema dello studio delle superficie Σ luogo delle posizioni che un punto fisso dello spazio occupa rispetto ai triedri di riferimento formati dalla normale e dalle due tangenti principali nei punti di una data superficie S. Particolare riguardo viene dato al caso delle superficie S per cui il luogo Σ predetto è una quadrica.

Due memorie sono dedicate alle superficie le cui normali si distribuiscono in una serie infinita di rigate applicabili sull'iperboloide rotondo. Un lavoro sulle superficie spirali conclude il primo gruppo di lavoro a cui abbiamo prima accennato. Il secondo gruppo di lavori contiene memorie sulle superficie d'area minima negli spazi a curvatura costante e sulle superficie a curvatura nulla sempre negli spazi di curvatura costante. Segue poi una nota dove viene svolta una teoria di trasformazioni delle equazioni di Moutard, per le quali viene pure stabilito un teorema di permutabilità. E in una successiva memoria vengono studiate nuove trasformazioni delle superficie isoterme collegate alle trasformazioni di Darboux. Se ne traggono legami fra la teoria delle superficie a curvatura media costante nello spazio euclideo e le superficie analoghe dello spazio iperbolico. Due note sono dedicate poi allo studio delle superficie minime cerchiate di Riemann insieme con una loro rappresentazione nello spazio iperbolico, ed alle superficie della classe $K = \frac{1}{[\varphi(\alpha) + \psi(\beta)]^2}$ (ora note come superficie del Bianchi) insieme con le analoghe degli spazi non euclidei. Infine si ha una nota dove il problema della ricerca delle superficie a curvatura costante nello spazio non euclideo iperbolico viene ricondotto a problemi relativi alle superficie dello spazio ordinario aventi a comune con le superficie isoterme l'immagine sferica delle linee di curvatura. I lavori di cui non abbiamo fatto esplicita menzione sono collegati a quelli sopraindicati. Vogliamo terminare con una osservazione tratta dalla introduzione del Villa e cioè che dalla lettura dei lavori del Bianchi appaiono molti problemi non ancora risolti in tutto o in parte sia nel campo metrico che in campi più ampi (affine, proiettivo ecc.); e, secondo le parole del Villa stesso: « in un periodo come il nostro in cui la matematica va sempre più affermando la sua posizione astratta — così argutamente definita da Russell — sempre verso più larghi orizzonti, questa geometria metrica euclidea classica, di cui il Bianchi fu certamente uno dei maggiori esponenti, ci riporta, per così dire, ai problemi concreti della geometria fisica, di quella fisica che risponde alla nostra immediata intuizione. Queste ricerche conservano per ciò interesse imperituro ».

L. MURACCHINI

F. SEVERI, *Il teorema di Riemann-Roch per curve, superficie, varietà. Questioni collegate.* « Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete », Heft 17, Springer Verlag, Berlin, 1958, pp. VI, 131, D. M. 23.60.

Il volume tratta il teorema classicamente detto di Riemann-Roch (R.-R.), concernente i sistemi lineari di ipersuperficie di una varietà algebrica, e altre fondamentali questioni della geometria sopra una varietà, che l'A. inquadra nella ricerca di teoremi, ad esso analoghi, che diano la dimensione (o, almeno, limitazioni significative per la dimensione) dei sistemi algebrici, di determinata natura, di varietà subordinate ad una data varietà algebrica, in funzione dei caratteri invarianti della varietà ambiente e di opportuni caratteri di una varietà del sistema.

Richiamate, in modo rapido ed efficace, alcune nozioni preliminari (§ 1), l'A. espone, nel § 2, il teorema di R.-R. per le serie lineari e per le serie abeliane (da lui introdotte e studiate) di gruppi di punti di una curva algebrica. Il § 3 è dedicato al teorema di R.-R. per i sistemi lineari di curve di una superficie:

$$r \geq n - p + p_a + 1 - i$$

(r dimensione del sistema lineare completo determinato da una curva della superficie, di grado n, genere p, indice di specialità i; p_a genere aritmetico della superficie). Sono lumeggiati i punti essenziali delle ricerche di M. Noether, F. Enriques, G. Castelnuovo e dell'A., attraverso le quali il teorema è stato acquisito; sono riferiti i complementi (alcuni relativamente recenti) apportati al teorema dall'A., in virtù dei quali esso risulta applicabile al sistema lineare individuato da una curva comunque riducibile o virtuale; sono dati alcuni criteri di regolarità (condizioni sotto le quali vale, nella formula ricordata, il segno di uguaglianza); è diffusamente trattato, in particolare, il teorema della regolarità del sistema aggiunto ad una curva, dato da E. Picard, nel 1905, nell'ipotesi che essa fosse sezione piana di un modello spaziale della superficie, cioè suscettibile di variare in un sistema lineare semplice triplamente infinito, ed esteso dall'A. al caso in cui la curva sia connessa, con una componente suscettibile di variare in un sistema algebrico infinito, che non sia un fascio irrazionale: sono riportati e illustrati i recenti risultati ottenuti al riguardo da K. Kodaira.

Il § 4 contiene l'esposizione della teoria dei sistemi algebrici di curve di una superficie. Sono richiamate le vicende del teorema centrale di essa, che afferma la completezza della serie lineare (caratteristica) segata su una curva del sistema dalle curve ad essa infinitamente vicine, dato da F. Enriques nel 1904, con una dimostrazione riconosciuta difettosa dall'A. nel 1921, e quindi oggetto di numerose ricerche di F. Enriques, dell'A., di B. Segre e di altri, in seguito alle quali è stato chiarito che il teorema non è incondizionatamente vero e sono state date condizioni sufficienti, molto larghe, per la sua validità. I risultati ottenuti al riguardo consentono all'A. di formulare un teorema di R.-R. per i sistemi algebrici di curve di una superficie: una curva C emiregolare (cioè irriducibile, non singolare, su cui il sistema canonico stacchi una serie completa), a serie caratteristica effettiva, individua un sistema algebrico $\{C\}$ di dimensione

$$R = n - p + p_g + 1 - i$$

(con i significati già richiamati di n, p, i, e p_g genere geometrico della superficie). Alla fine del § 4 è data la nozione di varietà di Picard di una superficie algebrica irregolare e sono riferiti alcuni risultati di F. Conforto, A. Andreotti e altri ad essa relativi.

Nel § 5 l'A. tratta i sistemi lineari di ipersuperficie di una varietà algebrica (non singolare o dotata di singolarità ordinarie). Egli definisce e studia, dapprima, il sistema canonico di una varietà V_r, giungendo, al modo consueto, alla nozione di genere geometrico P_r^g; dà poi due definizioni del genere aritmetico

$$G(V_r) = P_a^r = \binom{m-1}{-r1} - \psi(m - r - 2, D)$$

(m ordine di V_r, D varietà doppia della sua proiezione generica su S_{r+1}, $\psi(l, D)$ postulazione di D per le forme d'ordine l di S_{r+1}) e

$$g(V_r) = p_a^r = (-1)^r[\varphi(0) - 1]$$

($\varphi(l)$ postulazione di V_r per le forme d'ordine l). Introdotti i caratteri aritmetici $g(A^\alpha)$ di un sistema lineare $|A|$ di ipersuperficie di V_r

($A^1 = A$, $A^\alpha = (A^{\alpha-1}, A)$, $\alpha > 1$) egli assegna la dimensione virtuale di $|A|$ con la formula

$$\delta(|A|) = \sum_{\alpha=1}^{r} (-1)^{r-\alpha} g(A^\alpha) + (-1)^r p_a^r + r$$

e mostra che i multipli d'ordine abbastanza elevato del sistema delle sezioni iperpiane di V_r, nonchè altri sistemi lineari, soddisfacenti a particolari condizioni, hanno dimensione effettiva $\Delta(|A|)$ uguale alla dimensione virtuale $\delta(|A|)$, sono cioè regolari. Di qui l'A. deduce che $P_a^r = p_a^r$ e che il genere aritmetico è invariante relativo. Segue l'esposizione dei risultati finora noti, dovuti all'A. e a B. Segre, sul significato della differenza $\Delta(|A|) - \delta(|A|)$. Nell'ultima parte del § 5 l'A., dopo alcune premesse sulle forme differenziali su una varietà algebrica, espone la formula di Severi-Kodaira

$$P_a^r = i_r - i_{r-1} + \dots + (-1)^r i_1$$

(i_s numero delle forme indipendenti di grado s e di prima specie su V_r), dalla quale segue l'invarianza assoluta del genere aritmetico; la definizione della s-irregolarità di V_r ($s = 1, \dots, r$) e la sua interpretazione come ultima irregolarità di una sottovarietà di dimensione s di V_r; un recente risultato di K. Kodaira, relativo alla dimensione del sistema aggiunto ad un'ipersuperficie di V_r, dal quale segue la regolarità dell'aggiunto al sistema delle sezioni iperpiane di V_r.

Il § 6 è dedicato alla teoria dei sistemi d'equivalenza delle varie dimensioni sopra una varietà algebrica, iniziata e sviluppata dall'A. in numerosi lavori, dal 1932 in poi, alla quale hanno portato recentemente importanti contributi J. A. Todd e B. Segre. Dopo alcune premesse, che integrano quelle del § 1, l'A. espone le definizioni e le proprietà finora acquisite dei sistemi canonici delle varie dimensioni di una varietà algebrica; riferisce poi i risultati ottenuti sulle serie di gruppi di punti di una superficie, che portano alla formulazione di un teorema d'Abel e di un teorema di R.-R. per le serie a circolazione nulla o algebrica.

La chiarezza dell'esposizione, l'assenza di complicazioni formali, la preferenza data ai luminosi metodi classici della geometria algebrica rendono il volume accessibile anche ai non specialisti. L'opera è preziosa per i cultori di Geometria algebrica, che in essa troveranno ispirazione per ricerche di reale interesse. Per la parte del volume riguardante la teoria delle superficie riesce utile il raffronto con l'opera di F. Enriques: « Le superficie algebriche », Zanichelli, Bologna, 1949.

ALFREDO FRANCHETTA

B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, Roma, Docet, 1956, p. 422.

Il presente trattato fa seguito al volume primo che porta lo stesso titolo e che fu pubblicato nel 1951: come quest'ultimo, è basato su vari corsi tenuti presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica a Roma. Però il materiale di questo secondo volume è svolto in modo da ridurre al minimo i rinvii al primo volume.

Il libro è diviso in tre grandi capitoli. Il Cap. I (90 pagine) è dedicato ad una esposizione, dettagliata e limpidissima, dei preliminari algebrici, e da precisamente un'ampia discussione delle teorie delle rappresentazioni, corrispondenze e classi, nonchè gruppi, anelli, corpi e campi; moduli e spazi vettoriali. E come la sezione analoga nella *Geometria Moderna* dello stesso A., esso costituisce una eccellente introduzione alla teoria completa.

Questo materiale trova poi applicazione immediata nel cap. II che è di gran lunga il più esteso (226 pagine) dei tre. Qui pure la trattazione è quasi interamente autonoma, seguendo per la maggior parte le vie ormai classiche tracciate dal Lefschetz. Dopo aver definito spazi topologici e gruppi topologici l'A. pone le definizioni e stabilisce le proprietà di cellule, simplessi e circuiti, accennando anche alla nozione di strutture fibrate. Nelle sezioni che seguono sono trattate le varietà differenziabili e le loro strutture tangenziali e poi la teoria generale dei complessi, giungendo così ad uno degli argomenti principali del libro: omologia e coomologia nei complessi finiti.

Dopo questi sviluppi essenziali vengono alcune applicazioni: in primo luogo la varieta di Poincaré, poi uno sguardo alla teoria degli indici d'allacciamento a cui l'A. e i suoi discepoli hanno portato vari contributi importanti. Segue una lunga ed interessante sezione dedicata alle corrispondenze tra varietà di Poincaré, in particolare corrispondenze involutorie o semiregolari, da cui si deduce una estensione al campo topologico della formula di Zeuthen per le curve algebriche; in tale campo l'A. ha ottenuto in precedenza dei teoremi notevoli. Questo complesso di risultati viene applicato per stabilire un gruppo di teoremi ben noti, tra cui quelli di Borsuk, Poincaré - Bol, Poincaré - Brouwer e Borsuk - Ulam. Il capitolo termina con una esposizione del problema dei ricoprimenti della sfera: essa comprende alcuni risultati recenti dell'A. circa i valori della funzione $\omega(n, \nu)$ e cioè l'estremo inferiore dell'insieme dei diametri dei ν insiemi serrati che costituiscono un ricoprimento della sfera ad n dimensioni.

Col cap. III (80 pagine) si riprende il concetto di forma differenziale diffusamente illustrato nel primo volume; dopo una breve ricapitolazione dell'algebra delle forme differenziali esterne, si passa a considerare gli integrali di tali forme sopra le varietà differenziabili, in particolare l'importante nozione d'integrale di p-forma sopra una p-catena, il relativo teorema di Stokes e il periodo di forma chiusa. E nella sezione che segue vengono stabiliti i due teoremi principali di de Rham, con i metodi della Memoria di de Rham stesso: dopo di che l'A. fa alcune osservazioni interessanti su altre dimostrazioni possibili, con qualche cenno a lavori di Martinelli in quest'ordine di idee. Fin qui i risultati sono stati acquistati solamente per le varietà compatte orientabili: ma ora l'A. indica come le precedenti considerazioni possano venir estese alle varietà compatte non-orientabili. Poi si dimostra il teorema, d'importanza capitale, secondo cui una forma ω_n differenziale di prima specie sopra una data varietà algebrica V_n è dotata di periodi tutti reali, deve risultare identicamente nulla su V_n: onde segue facilmente il notissimo teorema di Hodge. Termina l'esposizione generale con un resoconto della teoria delle correnti.

Il libro conclude con due brevi applicazioni dei precedenti risultati: la prima, che esamina le riemanniane degli spazi lineari proiettivi, è evidentemente una preparazione per il terzo volume del trattato. La seconda invece è un brillante (ed originale) sfruttamento dei presenti metodi che conduce ad una soluzione del problema di caratterizzare le *trasformazioni cremoniane intere*. Si ricordi che una trasformazione cremoniana tra due spazi S_n, S'_n chiamasi *intera* se nelle equazioni della trasformazione diretta nonchè in quelle della trasformazione inversa le funzioni delle coordinate (non omogenee) che ivi compaiono sono tutti polinomi. Il problema di caratterizzazione, posto da O. H. Keller nel 1939, fu risolto nel solo caso $n = 2$ da W. Engel nel 1955 tramite considerazioni puramente algebriche che non sembra agevole estendere ai casi $n > 2$. Ora, con mezzi trascendenti-topologici, l'A. riesce a dare una elegante soluzione per tutti i valori di n.

La sommaria descrizione che abbiamo fornito del lavoro di Segre non può dare che una pallida idea del volume, ricco com'è di concetti e di risultati. Il libro desterà certamente un profondo interesse in Italia ed anche all'estero.

LEONARD ROTH

G. VRANCEANU, «*Leçons de Géométrie différentielle*», due vol., Bucarest, 1957 (Ed. de l'Ac. de la Rép. Pop. Roumaine. Vol. I, pp. 405, Lei 26,50; Vol. II, pp. 426, Lei 27,50).

Il primo volume è stato preceduto da una prima edizione in lingua francese del 1947 e da una traduzione in lingua rumena del 1952; il secondo, da un'edizione in lingua rumena del 1951. Ora i due volumi, che si presentano in elegante veste tipografica, sono entrambi in lingua francese e quindi più facilmente accessibili ad una vasta cerchia di studiosi.

Il contenuto dell'opera è ampio e vario. Vi si trovano gli spazi riemanniani, quelli a connessione affine, proiettiva, conforme; vi si incontrano spesso i sistemi di pfaffiani e i corrispondenti sistemi di congruenze, le varietà anolonome (campo questo in cui eccellono i contributi dell'Autore); vi trovano posto le equazioni differenziali, di cui si cercano gli invarianti, ed altri argomenti ancora. La trattazione, spesso personale, non è però legata a un solo algoritmo (anche se quello delle congruenze vi prevale), ma mira piuttosto a collegare tra loro algoritmi diversi; essa è illustrata da casi particolari, che spesso precedono il caso generale, agevolandone la presentazione. I risultati, dimostrati e talora solo enunciati, vanno da alcuni classici ad altri poco noti; vi figurano, accanto a contributi dell'Autore, quelli di parecchi altri Geometri, e qui piace trovare spesso nomi italiani.

Entrambi i volumi si dividono in 6 capitoli. Si incomincia, nel primo volume, con lo studio delle congruenze e dei pfaffiani (Cap. I). Ad esso si collega (Cap. II) la teoria dei gruppi continui di Lie (ad uno o più parametri), nella quale si tien conto di recenti perfezionamenti e, sopra tutto, dei contributi di Cartan. Si passa poi allo studio degli invarianti di oggetti geometrici (Cap. III) e del corrispondente problema di equivalenza, soffermandosi in particolare sull'equivalenza dei sistemi di pfaffiani. In questo studio vengono introdotte le varietà anolonome, che formeranno oggetto di più ampia trattazione nel Vol. II e viene fatta un'applicazione agli invarianti di equazioni differenziali ordinarie di primo e secondo ordine.

Il Capitolo IV è dedicato agli spazi a connessione affine. In essa viene accostata alla definizione di Weyl quella di Cartan, basata sulla corrispondenza affine tra i due spazi tangenti in punti infinitamente vicini. Oltre alle solite nozioni di trasporto parallelo, torsione, curvatura, ecc., esso contiene applicazioni dei metodi precedentemente esposti a problemi di equivalenza e di automorfismo. Nel Cap. V vengono studiati gli spazi di Riemann. Vi si tratta del parallelismo di Levi-Civita, delle geodetiche, della curvatura, delle coordinate normali, dell'immersione in uno spazio euclideo (con richiamo delle forme fondamentali di Bompiani), dell'equivalenza di due spazi distinti e delle trasformazioni di uno spazio in se stesso. L'ultimo capitolo (VI) si riferisce agli spazi a connessione proiettiva. L'Autore espone il punto di vista di Weyl; ma si attiene di più a quello di Cartan e sopra tutto a quello di Veblen, che associando alla connessione proiettiva un'opportuna connessione affine, ha dato una interpretazione proiettiva delle teorie relativistiche pentadimensionali. Anche in questi spazi sono introdotti sistemi di congruenze e ad essi sono estese alcune questioni trattate nei capitoli precedenti.

Il secondo volume incomincia con lo studio degli spazi parzialmente proiettivi (Cap. I) introdotti da Kagan e coltivati sopra tutto dalla scuola russa. Buona parte del capitolo è dedicata agli automorfismi e ai movimenti, con risultati di I. P. Egorov e dello stesso Autore. Si passa poi agli spazi a connessione conforme (Cap. II), definiti in modo simile a quello seguito per le connessioni affine e proiettiva. In questo capitolo, utilizzando la nozione di gruppo conforme di trasformazioni di congruenze, si dà una classificazione delle connessioni conformi. Nel Cap. III si studiano spazi più generali dei riemanniani, ma dotati di un tensore doppio asimmetrico covariante, o controvariante degenere, o misto. Nel primo caso si hanno due forme differenziali invarianti (una quadratica e una bilineare alternante) e vengono in particolare studiati quegli spazi in cui s'annulla la prima forma. Nel secondo e terzo caso lo studio viene fatto con l'associazione di opportuni sistemi di congruenze e dei corrispondenti pfaffiani.

Il Capitolo IV è dedicato agli spazi anolonomi, che vennero introdotti dall'Autore fin dal 1926, per dare un'interpretazione geometrica ai sistemi meccanici, dotati di vincoli di anolonomia. Ma, mentre questi spazi a sapore meccanico vanno considerati immersi in varietà riemanniane, qui la presentazione degli spazi anolonomi è molto più ampia e comprende anche quelli immersi in spazi a connessione affine, che vennero introdotti da Schouten. Il Capitolo V è un'interessante applicazione di metodi geometrici allo studio degli invarianti delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine. L'ultimo capitolo (VI) è dedicato ad alcune questioni di geometria differenziale in grande.

Nel suo complesso l'Opera è assai utile per l'introduzione in vari campi della moderna geometria differenziale.

MARIA PASTORI

(C. BÖHM), « INTINT ». *Programmazione indiretta per calcolatrici elettroniche.* Roma, Cremonese, 1958 (Manuali p. appl. tecniche del calcolo, n° 3); 74 pp.

Questo strano manualetto sembra scritto col metodo del *suspense*, cominciando dal fatto che anche il nome dell'autore non è dichiarato subito, ma lo si deve andare a cercare nella prefazione (di M. Picone). Superato questo primo scoglio, il lettore resta in dubbio se « INTINT » sia il nome di una nuova macchina calcolatrice (sono tanto di moda nomi del genere!) oppure un nuovo metodo di calcolo o qualche cosa di diverso. Comunque, dopo una quindicina di pagine, si finisce con l'essere quasi sicuri che non si tratta di una macchina, bensì di un metodo per facilitare la compilazione dei *programmi* per macchine calcolatrici elettroniche del genere della « FINAC » dell' Istituto per le Applicazioni del Calcolo di Roma, e questa convinzione viene fortificata dalle pagine che vengono dopo.

Detto questo, rinuncio a cercare di dare un'idea meno vaga del contenuto del volumetto chè, come si legge a pag. 37 dello stesso: « Sarebbe estrema- « mente laboriosa e d'altra parte utile solo per una ristretta cerchia di per- « sone, la descrizione dettagliata dell'organizzazione INTINT ovvero del « programma che trasforma la FINAC nell' INTINT-FINAC ».

FRANCESCO G. TRICOMI

L. SCHWARTZ, *Problèmes mixtes pour l'equation des ondes.* (Faculté des Sciences de Paris, Séminaire Schwartz, 3e année 1955/1956) Edizione a cura del « Secrétariat mathématique » 11, rue Pierre Curie, Paris 5e.

Il fascicolo riguarda alcune applicazioni della teoria delle distribuzioni al classico problema misto, nel senso di Hadamard, posto per l'equazione delle onde. Tanto il secondo membro dell'equazione, quanto l'incognita, sono nel caso più generale, distribuzioni a valori vettoriali. (Come è noto, detto $\mathfrak{D}$ lo spazio delle funzioni di n variabili nulle fuori di un compatto e indefinitamente differenziabili, con la consueta topologia, e detto E uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e completo, si dice spazio delle distribuzioni con valori in E lo spazio delle applicazioni lineari continue di $\mathfrak{D}$ in E, dotato della topologia della convergenza uniforme sugli insiemi limitati; nel caso che E sia la retta reale si ricade nelle usuali distribuzioni).

L'A. si serve dapprima della trasformazione di Laplace, la cui definizione è stata estesa alle distribuzioni a valori vettoriali in precedenti lavori. Viene anche considerato, in forma semplice ed elegante, il problema della regolarizzazione delle soluzioni. Il fascicolo si conclude con una esposizione del metodo delle onde stazionarie, sempre nel quadro della teoria delle distribuzioni.

I problemi sono impostati nella generalità e nella forma che sono richieste dalla fisica teorica. L'esposizione è chiara e semplice; avendo però il carattere di un breve appunto piuttosto che di una trattazione sistematica, molte premesse e simbolismi sono sottintesi o rinviati a lavori precedenti. Risulta dalla lettura che la teoria delle distribuzioni, anche quando non è strumento indispensabile, è sempre un utile linguaggio, linguaggio che può dare la impressione, soprattutto all'inizio, di eccessiva complicazione, ma che si presta facilmente ad inquadrare molti problemi ad un livello di notevole generalità.

GIOVANNI PRODI

A. P. NORDEN, *Elementare Einfürung in die Lobatschewskische Geometrie.* Ediz. Deutsche Verlag der Wissenschaften (Berlin 1958) - 259 pagine. (Traduzione dal russo)

Il volume consta di 12 capitoli preceduti da un capitolo introduttivo; la struttura dell'opera è la seguente: nella introduzione l'A. inquadra il suo argomento esponendo delle idee generali sulla Geometria e sul metodo deduttivo e fornendo inoltre delle notizie storiche sul postulato euclideo delle parallele e sulla persona e l'opera di Lobatschewski.

Nel I° Capitolo l'A. fonda la Geometria piana classica su cinque gruppi di postulati: postulati di appartenenza, postulati di ordinamento, postulati del movimento, postulato di continuità, postulato delle parallele. Il II° Capitolo è dedicato a Teoremi di Geometria piana assoluta (cioè indipendente dalla affermazione o dalla negazione del postulato euclideo della parallela); in questo Capitolo viene definita la retta parallela ad una retta r per un punto P fuori di essa in un certo verso come elemento separatore (nel senso di Dedekind) tra le rette per P secanti la r e le rette non secanti. Il rapporto di mutuo parallelismo tra due rette viene caratterizzato attraverso il comportamento delle distanze dei punti di una retta dall'altra. Il Capitolo III° è dedicato al postulato di Lobatschewski ed alle sue conseguenze

Il Capitolo IV° tratta delle questioni di equivalenza nel piano di Lobatschewski e delle proprietà del difetto angolare dei poligoni. Il Capitolo V° è dedicato alle curve fondamentali del piano (cerchi, oricicli ed ipercicli). Nel Capitolo VI° l'A. completa il sistema di postulati enunciati nel Capitolo I° per giungere a fondare la Geometria dello spazio; nel VII° tratta delle più notevoli proprietà di Geometria assoluta dello spazio. Il Capitolo VIII° è dedicato alla Geometria della orisfera, il IX° alla introduzione (per via elementare) della funzione esponenziale e delle fulnzioni iperboliche; il X° alla Trigonometria iperbolica. Il Capitolo XI° tratta della assenza di contraddizione del sistema geometrico di Lobatschewski ed infine il Capitolo XII° illustra i rapporti della Geometria di Lobatschewski con la Matematica moderna ed in particolare la influenza che su quest'ultima ha avuto la Geometria non euclidea.

Nella prefazione l'A. dichiara di aver voluto dare una esposizione della Geometria di Lobatschewski che fosse « ... elementare ma in pari tempo sistematica e rigorosa ». Effettivamente, come si vede subito dalla esposizione sommaria, l'opera è stata concepita come un tutto unico ed organico, sufficiente per dare al lettore una buona conoscenza del sistema geometrico di Lobatschewski e permettergli di comprendere la sua genesi storica ed i suoi rapporti con gli altri rami della Matematica, presentandogli inoltre gli aspetti ed i problemi principali di un moderno sistema ipotetico-deduttivo e permettergli di valutare i rapporti della Matematica, ed in particolare della Geometria, con le altre Scienze ed il significato ed i limiti delle teorie scientifiche

Varie impostazioni di concetti per via elementare e numerose dimostrazioni che si trovano nel volume sono particolarmente ingegnose: ricordiamo tra l'altro la introduzione delle funzioni iperboliche e della metrica proiettiva; il pregio dell'opera da questo punto di vista non appare sostanzialmente diminuito da qualche squilibrio che si può notare qua e là, per es. in relazione all'uso esplicito del concetto di « limite » e della relativa notazione per risolvere il problema elementare della misura dei segmenti.

Per quanto riguarda il rigore della trattazione, che l'A. si propone come uno tra i suoi scopi, pensiamo che tale espressione non sia stata intesa dall'A. stesso in senso assoluto, perchè altrimenti andrebbe osservato che varie deduzioni potrebbero essere migliorate e qualche enunciato potrebbe — se non rettificato — essere reso più immediatamente comprensibile. Di questi nèi si sono ben accorti gli stessi traduttori dell'opera i quali hanno aggiunto numerosi complementi e rettifiche a piè di pagina ed in parentesi esplicative nel testo, senza del resto (a nostro parere) giungere ad eliminare sostanzialmente ogni difetto di questo tipo.

Alla fine del volume vi è un elenco bibliografico di 78 opere in prevalenza riguardanti argomenti di Geometria, elenco che evidentemente non è stato concepito con intenzioni di esauriente completezza ma probabilmente soltanto con scopo orientativo a vantaggio del lettore russo.

CARLO FELICE MANARA

N. M. GÜNTER - R. O. KUSMIN, *Aufgabensammlung zur höheren Mathematik*, I, pp. VIII + 492; II, VI + 289, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.

I presenti due volumi di esercitazioni sono stati curati da Günter e Kusmin in lingua russa e, successivamente tradotti in tedesco, appaiono ora in una collezione di testi di matematica diretta da H. Grell, K. Maruhn e W. Rinow. Lo scopo dell'opera, secondo quanto dichiarano gli editori, è quello di colmare una lacuna nel campo delle pubblicazioni di matematiche superiori, di carattere didattico, in lingua tedesca. Mancava infatti una raccolta di esercitazioni e di complementi con le relative soluzioni. L'ópera di Günter e Kusmin effettivamente colma la predetta lacuna mettendo a disposizione del lettore una multiforme raccolta di esercizi che si può ritenere utile non soltanto a chi si occupa di matematica in senso stretto ma anche ai fisici e ai cultori di discipline tecniche. Gli esercizi sono ripartiti nei due volumi secondo il seguente schema. Il primo volume si può considerare più o meno dedicato alla materia che costituisce i corsi di matematica del nostro primo biennio per studenti di matematica, fisica e ingegneria. Infatti si hanno due capitoli dedicati alla geometria analitica: il primo riguardante il piano, il secondo lo spazio. Tre capitoli sono poi dedicati al calcolo differenziale e alle sue applicazioni geometriche. Segue poi un capitolo dedicato all'algebra. I rimanenti tre capitoli sono dedicati al calcolo integrale ed alle equazioni differenziali ordinarie insieme con le loro applicazioni alla geometria e alla meccanica.

Il secondo volume invece contiene materia che è da considerarsi complementare a quella contenuta nel primo: si tratta di argomenti che vengono svolti da noi per lo più in corsi del secondo biennio per gli studenti di matematica o di fisica. È questa la parte dove è maggiormente sentita la mancanza di raccolte di esercitazioni. Gli argomenti trattati nei sette capitoli sono i seguenti. Dapprima un capitolo sulle equazioni a derivate parziali e sistemi di equazioni differenziali. Segue un capitolo sulle serie di funzioni, in particolare le serie trigonometriche. Il capitolo successivo è dedicato al calcolo numerico e al calcolo degli errori. Vengono poi le funzioni di variabile complessa insieme con le loro applicazioni specialmente alla fisica matematica. Un capitolo è dedicato interamente alle equazioni differenziali e integrali che intervengono in questioni di fisica matematica mentre il capitolo successivo è dedicato al calcolo delle variazioni e anche qui non vengono trascurate le applicazioni geometriche o fisiche. Chiude il volume un capitolo dedicato al calcolo delle probabilità. Entrambi i volumi contengono le soluzioni degli esercizi proposti e i tracciati dei grafici delle funzioni da studiare.

LUIGI MURACCHINI

L. LEVIN, *Dilogarithms and associated functions*, Macdonald & Co., London, 1958, pp. XVI + 353, 65 s.

In questi ultimi anni varie questioni di Fisica Matematica e di Ingegneria hanno ridestato l'interesse per una funzione poco nota, studiata fino dai tempi di Euler, detta da Hill « dilogaritmo ». Si tratta precisamente della funzione

$$Li_2(z) = -\int_0^z \frac{\log(1-z)}{z}\,dz,$$

allo studio della quale e delle funzioni ad essa associate è dedicato questo volume.

Nel primo capitolo vengono esposte le fondamentali proprietà del dilogaritmo, le sue connessioni con altre funzioni speciali e si accennano anche i problemi fisici in cui si presenta tale funzione.

Il secondo ed il terzo capitolo sono dedicati allo studio della funzione (arcotangentintegrale)

$$Ti_2(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx,$$

e della sua generalizzazione, il quarto alla funzione di Clausen

$$Cl_2(\vartheta) = -\int_0^{\vartheta} \log\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta$$

Il dilogaritmo di argomento complesso, che di tutte queste funzioni sembra sia quella che più di frequente si presenta nelle applicazioni alla tecnica, è trattato nel capitolo quinto.

Nel sesto e settimo capitolo si studia il « polilogaritmo » cioè la funzione definita da

$$Li_n(z) = \int_0^z \frac{Li_{n-1}(z)}{z}\, dz.$$

Il capitolo ottavo è essenzialmente costituito da una raccolta di integrali esprimibili per mezzo delle funzioni di cui sopra.

Chiudono il volume un formulario di ben 34 pagine e delle estese tavole, in parte ricavate da una pubblicazione del 1954 del Mathematisch Centrum di Amsterdam ed in parte completamente nuove, come quella del dilogaritmo di argomento complesso preparata per questo volume dallo Scientific Computing Service Ltd..

Il libro per i risultati che vi si trovano raccolti e soprattutto per l'ampia ed aggiornata bibliografia che lo correda, si presenta particolarmente utile e raccomandabile per la consultazione.

LUIGI GATTESCHI