Bollettino
Unione Matematica Italiana

Tino Zeuli

Sul moto di una particella elettrizzata, di energia relativistica,in un campo elettromagnetico che si propaga per onde piane.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.1, p. 1–5.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sul moto di una particella elettrizzata, di energia relativistica, in un campo elettromagnetico che si propaga per onde piane.

Nota di Tino Zeuli (a Torino)

Sunto. - *É contenuto nel n. 1.*

1. In ordine alla considerazione del movimento di particelle veloci, il cui studio ha particolare importanza in molte questioni di fisica moderna, ho voluto considerare in questa nota il moto di una particella elettrizzata in un campo elettromagnetico generico che si propaga per onde piane in una data direzione. Un tale movimento, nel caso di un campo magnetico e di un campo elettrico sovrapposti, stazionari, è stato, come si sa, oggetto di studi da parte di diversi autori a cominciare da Störmer, ed esso è collegato col problema delle aurore polari. Ma il caso di un campo elettromagnetico nelle condizioni indicate e nell'ipotesi che il corpuscolo mobile sia dotato di energia relativistica, non mi sembra sia stato considerato da altri. Questo problema viene qui risolto in modo completo, parametricamente, mediante quadrature.

2. L'equazione vettoriale del moto di una particella di massa m, avente una carica elettrica e, in un mezzo dielettrico omogeneo isotropo di permeabilità magnetica μ e costante dielettrica ε, in cui si propaga un campo elettromagnetico, risulta com'è noto

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e\left(\vec{E} + \frac{\mu}{c}\vec{v} \wedge \vec{H}\right), \tag{1}$$

dove $\vec{v}$ è la velocità della particella, $\vec{E}$, $\vec{H}$ sono rispettivamente i vettori rappresentativi del campo elettrico e del campo magnetico, e c è la velocità della luce.

La massa della particella, che si suppone dotata di energia relativistica, è espressa come si sa, dalla

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{2}$$

essendo m_0 la massa a riposo.

I vettori $\vec{E}$, $\vec{H}$ del campo elettromagnetico, nell'ipotesi che la carica del corpuscolo non influenzi il campo e che in questo non vi siano altre cariche elettriche, soddisfano alle equazioni di MAXWELL

$$\begin{gathered} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Una soluzione di questo sistema, corrispondente ad onde elettromagnetiche piane che si propagano in una data direzione, con riferimento ad una terna di assi cartesiani ortogonali $O(x, y, z)$ con l'asse z nella direzione e nel verso di propagazione, è data da

$$H_y = 0,\ H_z = 0; \qquad E_x = 0,\ E_z = 0, \tag{4}$$

$$H_x = \varphi(z - v_0 t), \qquad E_y = -\sqrt{\mu/\varepsilon}\, \varphi(z - v_0 t), \tag{5}$$

dove φ è una funzione *arbitraria* dell'argomento

$$\zeta = z - v_0 t \tag{6}$$

e

$$v_0 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{7}$$

è la velocità di propagazione.

Indicando allora con x, y, z, le coordinate della particella mobile, le equazioni scalari che si ottengono dalla (1), in corrispondenza del campo definito dalle (4) e (5), risultano

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0, \\ &\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{e\mu}{c}(\dot{z} - v_0)\varphi(\zeta) = \frac{e\mu}{c}\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{dt}, \\ &\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = -\frac{e\mu}{c}\dot{y}\varphi(\zeta). \end{aligned} \right. \tag{8}$$

La prima delle (8) fornisce l'integrale dell'impulso

$$m\dot{x} = p_0 \qquad (= \text{costante}) \tag{9}$$

e, posto

$$\psi(\zeta) = \int \varphi(\zeta) d\zeta + \text{cost}, \tag{10}$$

la seconda delle (8) porge

$$m\dot{y} = \frac{e\mu}{c} \psi(\zeta), \tag{11}$$

dove la costante di integrazione è inclusa nella ψ.

Un terzo integrale primo si ottiene facilmente osservando che dalle equazioni (8) si ricava

$$m\dot{x} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + m\dot{y} \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + m\dot{z} \frac{d}{dt}(m\dot{z}) - mv_0 \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0.$$

cioè

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(m^2 v^2) - v_0 m \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0. \tag{12}$$

Ma dalla (2) si ricava

$$m^2 v^2 = c^2(m^2 - m_0^2), \tag{13}$$

perciò, sostituendo nella (12), si ha

$$c^2 \frac{dm}{dt} - v_0 \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0,$$

da cui segue l'integrale richiesto

$$m(c^2 - v_0 \dot{z}) = h_0 \qquad (= \text{costante}). \tag{14}$$

3. I tre integrali (9), (11) e (14) consentono di ridurre alle quadrature il problema di moto considerato.

Invero da essi si ricava

$$m^2 v^2 \equiv m^2 \dot{x}^2 + m^2 \dot{y}^2 + m^2 \dot{z}^2 = p_0^2 + \left(\frac{e\mu}{c}\right)^2 \psi^2(\zeta) + \frac{(mc^2 - h_0)^2}{v_0^2}.$$

e ponendo

$$h_0 = m_0(c^2 - k_0),$$

con k_0 ancora costante arbitraria, si ha per la (13) l'equazione

$$c^2(m^2 - m_0^2) = p_0^2 + \left(\frac{e\mu}{c}\right)^2 \psi^2(\zeta) + \frac{[c^2(m - m_0) + m_0 k_0]^2}{v_0^2} \tag{15}$$

che definisce la massa relativistica m in funzione del parametro ζ.

Ponendo

$$m = m_0 + \frac{M}{c^2} \tag{16}$$

l'equazione (15) diventa

$$(15') \quad \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) M^2 \quad 2m_0 v_0^2 \left(1 - \frac{k_0}{v_0^2}\right) M + v_0^2 \left[p_0^2 + \left(\frac{e\mu}{c}\right)^2 \psi^2(\zeta)\right] + m_0^2 k_0^2 = 0$$

e questa fornisce valori reali di M, quando la fuzione $\psi(\zeta)$ è tale che per ogni valore di ζ risulti

$$(17) \qquad \left(\frac{e\mu}{c}\right)^2 \psi^2(\zeta) \leq m_0^2 \frac{v_0^2 - 2k_0 + k_0^2/c^2}{1 - v_0^2/c^2} - p_0^2 .$$

Avuta la m in funzione di ζ, dalla (14) si deduce

$$(18) \qquad \dot{z} = \frac{c^2 m(\zeta) - h_0}{v_0 m(\zeta)} ,$$

ed in virtù della (6) si ha quindi

$$(19) \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{(c^2 - v_0^2) m(\zeta) - h_0}{v_0 m(\zeta)}$$

la quale fornisce il tempo in funzione di ζ con una quadratura:

$$(20) \qquad t - t_0 = v_0 \int \frac{m(\zeta)}{(c^2 - v_0^2) m(\zeta) - h_0} \, d\zeta .$$

Scrivendo inoltre

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt} , \quad \dot{y} = \frac{dy}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt}$$

e tenendo conto della (19), le equazioni (9) ed (11), mediante altre due quadrature, porgono

$$(21) \qquad \begin{aligned} x - x_0 &= p_0 v_0 \int \frac{d\zeta}{(c^2 - v_0^2) m(\zeta) - h_0} , \\ y - y_0 &= \frac{e\mu}{c} v_0 \int \frac{\psi(\zeta)}{(c^2 - v_0^2) m(\zeta) - h_0} \, d\zeta . \end{aligned}$$

La (6) dà infine anche la coordinata z del corpuscolo in funzione del parametro ζ, essendo già noto t in funzione di ζ in virtù della (20). Il problema risulta così completamente risolto, parametricamente, mediante quadrature.

4. Nel caso particolare in cui la massa della particella elettrizzata si possa ritenere costante, l'integrale (9) esprime che la componente della velocità secondo la direzione del campo magnetico è costante. L'integrale (11) e così pure la (12) sussistono ancora con m costante e porgono

$$\dot{y} = \frac{e\mu}{cm}\,\psi(\zeta), \tag{22}$$

$$\frac{1}{2}v^2 - v_0\dot{z} = K_0 \qquad (= \text{costante}). \tag{23}$$

Indicando con $\dot{x}_0$ il valore costante di $\dot{x}$, ed avendo riguardo alla (22), la (23) diventa

$$\frac{1}{2}\left[\dot{x}_0^2 + \left(\frac{e\mu}{cm}\right)^2\psi^2(\zeta) + \dot{z}^2\right] - v_0\dot{z} = K_0$$

dalla quale si ricava

$$\dot{z} = v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - \dot{x}_0^2 + 2K_0 - \left(\frac{e\mu}{cm}\right)^2\psi^2(\zeta)}\,.$$

Ne segue

$$\dot{\zeta} = \dot{z} - v_0 = \pm\sqrt{v_0^2 - \dot{x}_0^2 + 2K_0 - \left(\frac{e\mu}{cm}\right)^2\psi^2(\zeta)}$$

e quindi i valori del tempo t e della coordinata y, in funzione del parametro ζ, sono ora dati dagli integrali

$$t - t_0 = \int\frac{d\zeta}{\pm\sqrt{v_0^2 - \dot{x}_0^2 + 2K_0 - \left(\frac{e\mu}{cm}\right)^2\psi^2(\zeta)}}, \tag{24}$$

$$y - y_0 = \frac{e\mu}{cm}\int\frac{\psi(\zeta)d\zeta}{\pm\sqrt{v_0^2 - \dot{x}_0^2 + 2K_0 - \left(\frac{e\mu}{cm}\right)^2\psi^2(\zeta)}}, \tag{25}$$

mentre per il valore di z si ha: $z = \zeta + v_0 t$, essendo t fornito dalla (24).