
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ALESSANDRO TERRACINI

Gli elementi curvilinei piani del terz'ordine e una generalizzazione del teorema di Meusnier.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 14
(1959), n.1, p. 66–77.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_1_66_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Gli elementi curvilinei piani del terz'ordine e una generalizzazione del teorema di MEUSNIER.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino)

Sunto. - *Un elemento curvilineo piano del terz'ordine (non di flesso) individua un'ellisse d'ipercurvatura, vale a dire ellisse di eccentricità minima contenente l' E_3 , e con essa un centro d'ipercurvatura (centro della predetta ellisse). Un E_3 è pienamente individuato dal suo centro O con la relativa tangente o , e dal centro d'ipercurvatura. I centri d'ipercurvatura danno luogo ad un teorema che generalizza il classico teorema di MEUSNIER.*

Summary. - *A not inflexional plane E_3 gives rise to an ellipse of hypercurvature, i.e. the ellipse of minimal eccentricity containing the E_3 , and to a center of hypercurvature (the center of the ellipse). If the origin O , its tangent line o and the center of hypercurvature are given, the E_3 is completely defined. The ordinary theorem of MEUSNIER may be generalized substituting ellipses of hypercurvature for osculating circles.*

1. La presente Nota difficilmente può aspirare all'originalità, sia per la generalizzazione alla quale si accenna nel titolo, sia per il punto di vista concernente gli E_3 piani dal quale essa prende le mosse. Invero, per non parlare che di quest'ultimo, esso si presenta così spontaneamente, e per di più in un campo estremamente elementare, che sembra del tutto inverosimile che non sia già stato preso in considerazione. Però il fatto che esso non sia menzionato in un lavoro, dovuto alla collaborazione di LEVI-CIVITA e di FUBINI ⁽¹⁾, dove avrebbe fornito la soluzione più naturale del problema considerato dai due illustri geometri, e che inoltre non sia certamente di dominio comune, hanno indotto l'autore — al momento impossibilitato a condurre un'indagine bibliografica approfondita — a pubblicare egualmente questa Nota, che, se non altro, servirà a rimettere in circolazione dei risultati che in epoche recenti sono stati perduti di vista.

⁽¹⁾ T. LEVI-CIVITA e G. FUBINI: *Sulle curve analoghe al circolo osculatore quando si passa da tre a quattro punti infinitamente vicini*, « Annali di matem. », (4), t. VII, 1929-30, pp. 193-211. Nemmeno è menzionato nella recensione del predetto lavoro, dovuta a E. BORTOLOTTI, nel « Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. », vol. 56, 1930, pp. 589-590, né in DE FINETTI: *Curve tipiche iperosculatrici*, questo Boll., IX, 1930, pp. 20-25.

2. "Mentre passeggiavamo insieme durante la villeggiatura" così incomincia il lavoro di LEVI-CIVITA e di FUBINI (l. c. (1)) "ci si è affacciata una questioncella spettante ai primi principi della geometria differenziale la quale tuttavia, per quanto ci consta, non si trova discussa nella pur vasta e più che bisecolare letteratura sull'argomento. Ci permettiamo perciò di pubblicare il risultato della nostra conversazione, completata da una singolare osservazione dovuta al prof. BLASCHKE".

La "questioncella" di cui si tratta era questa: come ogni curva si può identificare nell'intorno di second'ordine di un suo punto generico con una circonferenza, a quale curva conviene ricorrere perchè la coincidenza si estenda al terzo ordine? Tale è la questione considerata da LEVI-CIVITA e FUBINI, da un lato per curve piane e d'altro lato per curve spaziali: diciamo subito che da noi essa viene presa in esame unicamente per curve piane.

Dato dunque un E_3 piano non di flesso (di centro O e con retta tangente o), che supponiamo rappresentato in coordinate cartesiane ortogonali da

$$(2'1) \quad y = ax^2 + bx^3 + [4],$$

(dove $a \neq 0$, e anzi possiamo supporre $a > 0$, invertendo eventualmente il verso positivo sull'asse y) volendo cercare una curva che lo contenga, e che sia da esso univocamente determinata, mi pare che l'idea più semplice — e nello stesso tempo più vicina a quella che per un E_2 conduce al cerchio osculatore — sia di ricorrere all'ellisse di eccentricità minima contenente l' E_2 .

Giungiamo all'equazione di tale ellisse, osservando che per le coniche

$$(2'2) \quad -y + px^2 + qxy + ry^2 = 0$$

contenenti l' E_2 , e quindi con

$$(2'3) \quad p = a, \quad q = b/a,$$

(cosicchè attualmente $p > 0$), supposte dotate di centro ($4pr - q^2 \neq 0$), il quadrato dell'eccentricità è dato da

$$(2'4) \quad e^2 = \frac{2}{4pr - q^2} \sqrt{(p - r)^2 + q^2} (p + r - \sqrt{(p - r)^2 + q^2}).$$

Assegnati a , b , e quindi — a norma delle (2'3) — anche p , q , il secondo membro è una funzione di r ; annullandone la derivata si ha un'equazione in r , la cui unica radice (distinta dalla

$r = q^2/(4p)$ è

$$(2'5) \quad r = \frac{2p^2 + q^2}{2p}.$$

Sostituendola in (2'2) si ha appunto l'ellisse di eccentricità minima contenente l' E_3 (2'1) ⁽²⁾; p, q sono dati dalle (2'3). Il significato geometrico della (2'5) apparirà tra poco; cfr. III).

Per un'osservazione da farsi in seguito (Oss. III del n. 6) conviene rilevare che, lasciando ancora a parte il caso della parabola, dalla (2'4) segue che, dato e' , la r dipende da un'equazione di secondo grado, la quale ammette una radice doppia se e solo se $e = \sqrt{2}$ (iperbole equilatera), oppure se e ha il valore che compete all'ellisse di eccentricità minima, per la quale naturalmente si trova il valore di r dato dalla (2'5). Ogni valore dell'eccentricità superiore a quest'ultimo, e diverso da 1 e da $\sqrt{2}$ è dunque realizzato da due coniche (2'2) tra loro distinte contenenti il dato E_3 , mentre sono uniche sia la parabola, sia l'iperbole equilatera, sia l'ellisse di eccentricità minima che lo contengono ⁽³⁾.

Il centro S dell'ellisse di eccentricità minima contenente l' E_3 (2'1) ha le coordinate

$$(2'6) \quad x_0 = \frac{-q}{4p^2 + q^2}, \quad y_0 = \frac{2p}{4p^2 + q^2}$$

dove p, q si esprimono ancora mediante le (2'3).

Rileviamo esplicitamente che:

I) Un E_3 si può individuare assegnandone, oltre al centro O con la relativa retta tangente o , il punto S , centro dell'ellisse di eccentricità minima destinato a contenerlo. Questo enunciato risulterà provato tra un momento, come conseguenza di III).

Per il momento, verifichiamo che:

II) per un'ellisse qualunque contenente l' E_3 (2'1) — ellisse rappresentata dalle (2'2) con p, q dati dalle (2'3) e con $4pr - q^2 > 0$ — la lunghezza ζ del semidiametro coniugato di quello diretto al punto

⁽²⁾ Più sopra si è supposto $a > 0$, e quindi $p > 0$. Però la (2'5) continua a sussistere anche per $p < 0$.

Rileviamo inoltre che la (2'5) porge $pr > 0$, e quindi $4pr - q^2 > 2pr - q^2 > 0$, confermando così che la conica di eccentricità minima in questione è effettivamente un'ellisse.

⁽³⁾ Sia questa parabola, sia l'iperbole equilatera (ma non l'ellisse di eccentricità minima) sono menzionate da LEVI-CIVITA e FUBINI, l. c. (1).

O è data da

$$(2'7) \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{4pr - q^2}}.$$

Invero le coordinate x_1, y_1 del centro T dell'ellisse soddisfano alle

$$(2'8) \quad 2px_1 + qy_1 = 0, \quad qx_1 + 2ry_1 = 0,$$

da cui seguono le

$$(2'9) \quad px_1^2 + qx_1y_1 + ry_1^2 = y_1/2,$$

$$x_1 = \frac{-q}{4pr - q^2}, \quad y_1 = \frac{2p}{4pr - q^2}.$$

Seguendo l'ellisse (2'2) con la retta $y = y_1$ si ricava appunto la (2'7).

Ne segue che:

III) per l'ellisse di eccentricità minima contenente un dato E_3 di centro O il diametro diretto al punto O e il diametro coniugato sono tra loro eguali. Basta invero utilizzare da un lato la (2'7) dove si adotti per r il valore (2'5), e d'altro lato la

$$(2'10) \quad \alpha_0 = |SO| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{1}{\sqrt{4p^2 + q^2}}.$$

Resta ora giustificata anche l'affermazione I), in quanto, noti O, o, S , dell'ellisse di eccentricità minima si conoscono due diametri coniugati in posizione e grandezza (e — ove occorra — la ellisse stessa si potrà anche disegnare per punti).

Chiameremo rispettivamente *ellisse d'ipercurvatura, centro d'ipercurvatura, raggio d'ipercurvatura* di un E_3 (non di flesso) di centro O l'ellisse di eccentricità minima che lo contiene, il centro S dell'ellisse, e la distanza $\alpha_0 = |SO|$ tra il centro dell'elemento ed il centro dell'ellisse. Se $b = 0$, cioè (cfr. il principio del n. 3) se la normale affine dell' E_3 coincide con la normale metrica, cioè se l' E_3 è circolare, ellisse d'ipercurvatura, centro d'ipercurvatura, raggio d'ipercurvatura coincidono rispettivamente col cerchio osculatore, col centro di curvatura e col raggio di curvatura.

Dalle (2'10), (2'3) segue che per l' E_3 (2'1) il raggio d'ipercurvatura è dato da

$$(2'11) \quad \alpha_0 = \frac{|a|}{\sqrt{4a^2 + b^2}}.$$

Le denominazioni introdotte si possono applicare senz'altro anche ad una linea piana L , relativamente a ciascuno dei suoi punti, in quanto questo si consideri come il centro dell' E_3 appartenente alla linea stessa.

Se, in coordinate cartesiane ortogonali, la linea L è rappresentata dall'equazione $y = f(x)$, il suo centro d'ipercurvatura $S \equiv (x_0, y_0)$ nel punto (x, y) della linea stessa ha le coordinate date dalle

$$(2'12) \quad \begin{cases} x_0 = x - \frac{f'''}{3f''} (1 + f'^2) \left[f''^2 - \frac{2}{3} f' f''' + \frac{f'''^2 (1 + f'^2)}{9 f''^2} \right]^{-1}, \\ y_0 = y + \left(f'' - \frac{f' f'''}{3f''} \right) (1 + f'^2) \left[f''^2 - \frac{2}{3} f' f''' + \frac{f'''^2 (1 + f'^2)}{9 f''^2} \right]^{-1}, \end{cases}$$

dove $f' = df/dx$, ecc. Le (2'12) si ottengono dalle (2'6) con una semplice trasformazione di coordinate. Da esse segue subito per il quadrato del raggio d'ipercurvatura α_0 l'espressione

$$(2'13) \quad \alpha_0^2 = (1 + f'^2)^2 \left[f''^2 - \frac{2}{3} f' f''' + \frac{f'''^2 (1 + f'^2)}{9 f''^2} \right]^{-1}$$

Dalle (2'12) si deducono anche facilmente le espressioni di x_0, y_0 per il caso in cui la linea L è data parametricamente: per brevità ci limitiamo a scriverle nell'ipotesi che il parametro t coincida con l'arco affine; posto $\dot{x} = dx/dt$, ecc., (cosicchè $\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = 1$) risulta che

$$(2'14) \quad \begin{cases} x_0 = x + \frac{\dot{x}^2 \ddot{x} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x} \ddot{y} + \dot{y} \ddot{x} + (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \ddot{x}^2}, \\ y_0 = y - \frac{\dot{y}^2 \ddot{y} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x} \ddot{y} + \dot{y} \ddot{x} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \ddot{y}^2}. \end{cases}$$

3. I centri delle infinite coniche contenenti l' E_3 considerato (e tra essi il centro d'ipercurvatura) appartengono alla normale affine dell' E_3 , dato che la normale affine di una conica in un suo punto O coincide col diametro passante per O ; e per la medesima ragione appartiene alla medesima normale affine anche il punto improprio della parabola passante per l' E_3 .

Tutto ciò è ovvio. Non ovvio invece è che:

IV) Per ognuna delle coniche contenenti un dato E_3 di centro O , il semiparametro relativo al diametro uscente da O eguaglia il raggio d'ipercurvatura dell' E_3 .

Si tratti invero anzitutto di un'ellisse, data dalla (2'2), con

$4pr - q^2 > 0$. Il semidiametro z diretto al punto O , a norma delle (2'9), è dato da

$$\alpha = \frac{\sqrt{4p^2 + q^2}}{4pr - q^2}.$$

cosicchè dalla (2'7) segue

$$\frac{\beta^2}{z} = \frac{1}{\sqrt{4p^2 + q^2}}.$$

E siccome il primo membro esprime proprio il semiparametro ⁽⁴⁾ di cui si parla nell'enunciato, mentre il secondo membro, in virtù della (2'10), dà il raggio d'ipercurvatura, il teorema — nel caso di un'ellisse — è provato.

Per il caso dell'iperbole, bastano ovvie modificazioni, sulle quali non ci trattiamo.

Infine, per il caso della parabola, si può partire dalla sua equazione riferita alla tangente nel vertice e all'asse, sotto la forma $y = x^2/(2P)$, ricavando dalle (2'12) per il raggio d'ipercurvatura nel punto $O \equiv (x, y)$ il valore

$$z_0 = P + 2y.$$

D'altro lato, questa stessa espressione ⁽⁵⁾ conviene anche al semiparametro relativo al diametro uscente da O .

Perciò il teorema risulta dimostrato in ogni caso.

4. Secondo il teorema I del n. 2, un E_3 è completamente individuato quando, oltre al suo centro O con la relativa tangente o , se ne conosce il centro d'ipercurvatura S . L'idea di caratterizzare un E_3 mediante O , o ed un ulteriore punto si trova nell'*Osservazione*, che fa capo a BLASCHKE, con la quale si chiude il lavoro di LEVI-CIVITA e FUBINI l.c. ⁽¹⁾; ma ivi il punto ulteriore viene scelto nel centro di "seconda curvatura" (centro di curvatura dell'evolvente), sia M , oppure nel punto, diciamo H , proiezione ortogonale dell'ordinario centro di curvatura C sulla retta OM (il punto H è anche il polo della spirale logaritmica contenente l' E_3). Ma l'idea che guida alla scelta del punto S , di cui nel presente lavoro, mi sembra assai più spontanea in confronto delle altre.

⁽⁴⁾ Cfr. p. e. D'OVIDIO: *Geometria analitica*, 3.a ed., Torino 1903, p. 307 (e per l'iperbole p. 308).

⁽⁵⁾ Cfr. p. e. — salvo mutamenti nelle notazioni e nella nomenclatura SALMON: *Sections coniques* (trad. francese di O. CHEMIN), n. 213.

Comunque, noto il punto S , si può intanto costruire il punto C , come intersezione della normale dell' E_3 (normale alla retta o in O) con la perpendicolare alla OS in S , come risulta p.e. confrontando le coordinate ($2^{\circ}6$) di S con quelle di C , vale a dire $(0, 1/(2a))$. Si ottiene poi il punto M sulla parallela alla retta o per C , prendendo su tale parallela il punto M per il quale $CM = 3LC$ (anche in segno), dove L è il punto di intersezione di quella parallela con la retta OS . La giustificazione di questa costruzione è pressochè immediata partendo dall'osservazione che le coordinate del punto M sono $3b/(4a^3), 1/(2a)$. Del resto la stessa costruzione è d'accordo con quella assegnata da BLASCHKE per la normale affine a partire dal centro di "seconda curvatura" (6). Ottenuto il punto M , diventa ovvia la costruzione del punto H .

È anche facile assegnare altre costruzioni elementari per ottenere, sempre a partire da O , o e dal punto S , altri punti collegati in modo geometricamente semplice con l' E_3 individuato da O , o , S (ciascuno dei quali potrebbe a sua volta assumersi, insieme con O , o , per individuare l' E_3 considerato); per esempio il centro dell'iperbole equilatera contenente l' E_3 , che si ottiene come simmetrico di S rispetto ad O , oppure il fuoco F della parabola contenente l' E_3 , il quale si ottiene da S mediante la similitudine prodotto della simmetria rispetto alla normale in O per l'omotetia di centro O e rapporto $1/2$. Tutto ciò si giustifica subito mediante calcoli elementari atti a fornire le coordinate dei punti testè considerati.

OSSERVAZIONE. - La rappresentazione di un E_3 mediante O , o ed il centro d'ipercurvatura S conduce spontaneamente a caratterizzare i cosiddetti sistemi (G) (7) di E_3 tangenti in O alla retta o mediante una proprietà inerente ai centri d'ipercurvatura: effettivamente risulta facilmente che un sistema (G) è caratterizzato dal fatto che il luogo del centro d'ipercurvatura di un E_3 variabile

(6) W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie II: Affine Differentialgeometrie*, Berlin, Springer, 1923, v. p. 33.

(7) A. TERRACINI, *Sobre la ecuación diferencial $y''' = G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y'^2$* , « Rev. de matem. y fís. teor. de la Univ. Nac. de Tucumán », t. 2, 1941: in tale Memoria i sistemi (G) sono considerati, e quindi anche caratterizzati, dal punto di vista proiettivo. Di carattere metrico sono invece altre caratterizzazioni assegnate molti anni prima da E. KASNER: *The trajectories of Dynamics*, « Trans. of the Amer. math. Soc. », vol. 7, 1906 (cfr. anche KASNER: *Differential-Geometric Aspects of Dynamics*, « Amer. Math. Soc. Colloquium Publications », vol. III, 1913, con ristampe successive).

nel sistema è un cerchio passante per il punto O . Del resto — attraverso la costruzione sopra indicata — questa proprietà si trasforma subito in quella già notata da KASNER l.c. (7) relativa al luogo del fuoco della parabola contenente un E_3 variabile in un sistema (G).

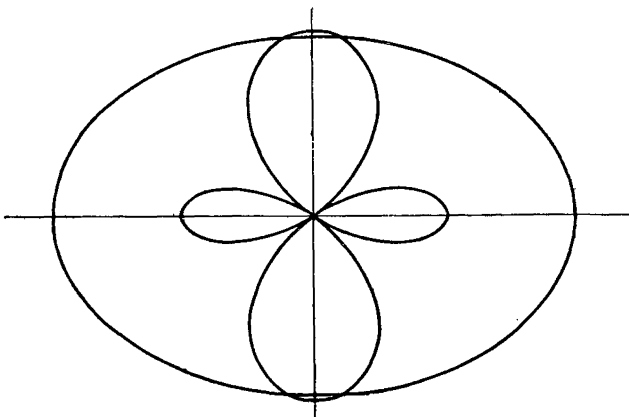
5. a) *Il luogo dei centri d'ipercurvatura di una conica.* Se la conica è un'ellisse (non cerchio)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

le (2'12), opportunamente trasformate, conducono a trovare come linea luogo dei suoi centri d'ipercurvatura la sestica

$$(5'1) \quad a^2 b^2 (b^2 x^2 + a^2 y^2) (x^2 + y^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 (b^2 x^2 - a^2 y^2) = 0,$$

dotata di un punto quadruplo nel centro dell'ellisse, con le tangenti (sei-punte) coincidenti a coppie con le rette $y = \pm (b/a)x$. L'andamento della sestica appare dalla figura. Varianti ovvie si hanno



nel caso dell'iperbole, con l'avvertenza che, se l'iperbole è equilatera, si stacca dalla sestica la coppia, contata due volte, delle rette isotrope per il centro dell'iperbole, ed il luogo si riduce ad una nuova iperbole equilatera, che si può ottenere dalla data con una omotetia avente il centro nel centro dell'iperbole e rapporto 2.

Finalmente, nel caso della parabola, dalle stesse (2'12), che in questo caso non occorre nemmeno trasformare, si deduce che il luogo dei centri d'ipercurvatura è una nuova parabola, la quale si può ottenere dalla data mediante un'omologia affine ortogonale avente per asse la direttrice della parabola data, e rapporto eguale a 3.

b) Le curve con raggio d'ipercurvatura costante. Chiamando k il valore costante del raggio d'ipercurvatura in un punto variabile della linea $y = f(x)$, la determinazione della f dipende, a norma della (2'13) dall'integrazione dell'equazione differenziale del terzo ordine

$$(5'2) \quad 9(1 + f'^2)^2 - k^2 \left[9f''^2 - 6f'f''' + \frac{f''^3}{f'^2} (1 + f'^2) \right] = 0.$$

Una soluzione, dipendente da due costanti arbitrarie, è ovviamente offerta dai cerchi di raggio k aventi centro arbitrario. Precedendo da questa soluzione, la (5'2) si integra con procedimenti di routine, i quali conducono a trovare per la più generale delle linee cercate la rappresentazione parametrica (in funzione di un parametro t):

$$(5'3) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \beta \mp \frac{k}{6\sqrt{1+\alpha^2}} \log [(t+\alpha)^{-2} (t-t_2)^{1+\alpha\sqrt{3}} (t-t_3)^{2-\alpha\sqrt{3}}] \\ y &= \gamma \pm \frac{k}{6\sqrt{1+\alpha^2}} \log [(t+\alpha)^{-2\alpha} (t-t_2)^{\alpha-\sqrt{3}} (t-t_3)^{\alpha+\sqrt{3}}], \end{aligned} \right.$$

dove α, β, γ sono costanti arbitrarie, mentre

$$t_2 = \frac{\sqrt{3}-\alpha}{\alpha\sqrt{3}+1}, \quad t_3 = \frac{\sqrt{3}+\alpha}{\alpha\sqrt{3}-1}.$$

Un esempio molto particolare, corrispondente alla scelta $\alpha = \beta = \gamma = 0$ delle costanti arbitrarie, è fornito, scambiando tra loro x, y , dalla linea

$$(5'4) \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}} (-x + \lambda \log(1 + e^{2x/2}))$$

dove si è posto $\lambda = \pm k/\sqrt{3}$.

6. Ricorrendo all'ellisse d'ipercurvatura si ha la seguente generalizzazione del teorema di MEUSNIER:

I) Se g è una retta tangente, non principale, di una superficie F in un suo punto semplice O , le ellissi d'ipercurvatura in O delle linee sezioni di F prodotte da piani passanti per g hanno come luogo un ellissoide (tangente alla superficie F nel punto O).

Assumiamo invero la retta g come asse x di una terna cartesiana ortogonale xyz di origine O (col piano xy coincidente col piano tangente in O), e sia

$$(6'1) \quad z = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \lambda x^3 + \mu x^2y + \nu xy^2 + \rho y^3 + [4]$$

l'equazione locale della F . Un piano variabile intorno all'asse x , sia $z = hy$, sega la F in una curva il cui E_2 di centro O si proietta ortogonalmente sul piano xy secondo l' E_3

$$y = \frac{\alpha}{h} x^2 + \left(\frac{\alpha\beta}{h^2} + \frac{\lambda}{h} \right) x^3 + [4].$$

Introducendo una nuova terna cartesiana ortogonale XYZ con

$$X = x, \quad Y = \frac{y + hz}{\sqrt{1 + h^2}}, \quad Z = \frac{-hy + z}{\sqrt{1 + h^2}},$$

l' E_2 in questione, nel piano $Z=0$, è rappresentato da

$$Y = \sqrt{1 + h^2} \left(\frac{\alpha}{h} X^2 + \left(\frac{\alpha\beta}{h^2} + \frac{\lambda}{h} \right) X^3 \right) + [4].$$

cosicchè, a norma delle (2'1), (2'2), (2'3), (2'5), la sua ellisse d'ipercurvatura è

$$(6'2) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = 0, \\ -Y + \frac{\alpha \sqrt{1 + h^2}}{h} X^2 + \left(\frac{\beta}{h} + \frac{\lambda}{\alpha} \right) XY + \\ \quad + \left(\frac{\alpha \sqrt{1 + h^2}}{h} + \frac{(\alpha\beta + \lambda h)^2}{2\alpha^3 h \sqrt{1 + h^2}} \right) Y^2 = 0 \end{array} \right.$$

Trasformando il sistema (6'2) in coordinate xyz , ed eliminando h , si trova come luogo dell'ellisse d'ipercurvatura in O delle sezioni piane considerate la quadrica

$$(6'3) \quad -z + \alpha x^2 + \beta xy + \frac{\lambda}{\alpha} xz + \left(\alpha + \frac{\beta^2}{2\alpha}\right) y^2 + \frac{\beta\lambda}{\alpha^2} yz + \left(\alpha + \frac{\lambda^2}{2\alpha^3}\right) z^2 = 0$$

che risulta precisamente un ellissoide, il che dimostra il teorema.

OSSERVAZIONE I. - Il teorema testè dimostrato generalizza il teorema di MEUSNIER, in quanto questo si enunci con riguardo ai cerchi osculatori in O alle sezioni di una superficie prodotte dai piani passanti per una data retta tangente in O . Quando invece si enunci il teorema di MEUSNIER con riguardo ai centri di curvatura relativi ad O delle predette sezioni, esso si generalizza come segue:

II) *Nelle stesse ipotesi dell'enunciato precedente, il luogo dei centri d'ipercurvatura in O delle linee sezioni della superficie prodotte da piani passanti per g è una ellisse, contenuta in un piano per la tangente g' coniugata della g .*

Il nuovo enunciato è una facile conseguenza di I).

OSSERVAZIONE II. - Altri due modi di generalizzare il teorema di MEUSNIER si hanno quando, nel teorema I, continuando a tagliare la superficie con piani passanti per la g , anzichè le ellissi d'ipercurvatura in O , si considerano le parabole, oppure le iperboli equilateri, contenenti gli E_3 di centro O . Come luoghi, si ottengono ancora delle quadriche, e precisamente:

a) un cilindro parabolico, quando si considerano le parabole;

b) un iperboloide (a una falda) quando si considerano le iperboli equilateri.

Entrambe le asserzioni si verificano facilmente, partendo ancora dalla (6'1). Per quanto riguarda il caso a), il calcolo è pressochè immediato, e conduce all'equazione

$$(6'4) \quad -z + \alpha x^2 + \beta xy + \frac{\lambda}{\alpha} xz + \frac{\beta^2}{4\alpha} y^2 + \frac{\beta\lambda}{2\alpha^2} yz + \frac{\lambda^2}{4\alpha^3} z^2 = 0,$$

la quale rappresenta appunto un cilindro parabolico (con le generatrici parallele alla retta g' già menzionata in II).

Quanto a b), si trovano anzitutto per l'iperbole equilatera contenente l' E_3 di centro O della linea sezione della superficie (6'1) col piano $z = hy$, le equazioni:

$$\begin{cases} z = hy \\ -y + \frac{\alpha}{h} x^2 + \left(\frac{\beta}{h} + \frac{\lambda}{\alpha}\right) xy - \frac{\alpha}{h} (1 + h^2) y^2 = 0. \end{cases}$$

Eliminando h da questo sistema, risulta per il luogo di quell'iperbole equilatera l'equazione

$$(6'5) \quad -z + \alpha x^2 + \beta xy + \frac{\lambda}{\alpha} xz - \alpha y^2 - \alpha z^2 = 0,$$

che rappresenta appunto un iperboloide (a una falda).

Si può osservare che l'ellissoide (6'3), il cilindro parabolico (6'4) e l'iperboloide (6'5) appartengono ad uno stesso fascio (sommando le (6'3), (6'5) si ha un'equazione equivalente alla (6'4)). Questo fascio, come quadriche specializzate, contiene soltanto il cilindro (6'4) e la coppia di piani, immaginari coniugati, passanti per la retta g :

$$(6'6) \quad \left(\beta y + \frac{\lambda}{\alpha} z\right)^2 + 4\alpha^2 (y^2 + z^2) = 0,$$

(la quale coppia assorbe tre fra le quadriche specializzate del fascio, d'accordo con la circostanza che la retta g , comune ai due piani costituenti la coppia (6'6), è tangente alle quadriche del fascio).

OSSERVAZIONE III. - L'ellisse d'ipercurvatura, la parabola e l'iperbole equilatera contenenti un E_3 conducono dunque a tre diversi modi di generalizzare il teorema di MEUSNIER, in ciascuno dei quali una quadrica sostituisce la sfera dell'enunciato originario. Invece, per le altre determinazioni dell'eccentricità di una conica contenente un dato E_3 , il teorema di MEUSNIER non è certamente generalizzabile nel senso specificato. Invero allora (cfr. il n. 2, poco oltre la (2'5)), in ogni piano contenente la retta g esistono due coniche di data eccentricità che contengono l' E_3 da considerare in quel piano, cosicchè come luogo non si può ottenere una quadrica.