CATALDO AGOSTINELLI

Sull'equilibrio relativo magneto idrodinamico di masse fluide elettricamente conduttrici uniformemente rotanti e gravitanti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.1, p. 95–101.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_1_95_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

Sull'equilibrio relativo magneto idrodinamico di masse fluide elettricamente conduttrici uniformemente rotanti e gravitanti.

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino)

Sunto. - *Come nel n° 1.*

1. In una nota di alcuni anni fa [1], considerando le soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto idrodinamica, mostrai come per una massa fluida incompressibile, elettricamente conduttrice, uniformemente rotante, soggetta alla propria gravitazione e a un campo magnetico assiale uniforme, siano possibili delle figure di equilibrio ellissoidali rotonde con un campo magnetico trasversale indotto proporzionale alla velocità delle particelle fluide.

In questa nota, riprendendo la questione e ammettendo che la conduttività elettrica del fluido sia infinita, come si può ritenere nel caso di masse stellari e come ordinariamente si suppone in questioni del genere, stabilisco intanto le condizioni alle quali deve soddisfare il campo magnetico per avere figure di equilibrio uniformemente rotanti intorno a un asse; dimostro che il campo deve essere neccessariamente simmetrico rispetto all'asse di rotazione e distinguo i casi più notevoli che si possano presentare. mettendo in rilievo quelli che danno luogo a figure di equilibrio ellissoidali rotonde.

2. Nell'ipotesi che la conduttività elettrica del fluido sia infinita e il campo magnetico $\vec{H}$ sia stazionario, esso deve verificare l'equazione

$$\text{rot}\,(\vec{H} \wedge \vec{v}) = 0, \tag{1}$$

dove $\vec{v}$ è il vettore velocità delle particelle fluide, e sarà inoltre

$$\text{div}\,\vec{H} = 0.$$

[1] C. AGOSTINELLI, *Soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto idrodinamica interessanti la Cosmogonia* («Rendiconti dell'Accademia Naz. dei Lincei», serie VIII, vol. XVII, fasc. 5 - Nov. 1954).

L'equazione del moto risulta

$$(3)\qquad \operatorname{rot}\vec{v}\wedge\vec{v}-\frac{\mu}{4\pi\rho_0}\operatorname{rot}\vec{H}\wedge\vec{H}+\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2}v^2+\frac{p}{\rho_0}-U\right)=0,$$

dove μ è la permeabilità magnetica del mezzo che si suppone costante; ρ_0 è la densità di massa, che, trattandosi di un fluido incompressibile si ritiene pure costante; p è la pressione ed U è il potenziale newtoniano delle forze di mutua attrazione delle particelle fluide. Ad essa va associata l'equazione di continuità.

$$(4)\qquad \operatorname{div}\vec{v}=0.$$

Considerando un fluido uniformemente rotante con velocità angolare ω intorno ad un asse baricentrale Oz, il cui versore indichiamo con $\vec{k}$, e detta P una particella del mezzo si ha

$$\vec{v}=\vec{\omega}\wedge(P-0),\qquad \vec{\omega}=\omega\vec{k}.$$

Per la nota formula

$$\operatorname{rot}(\vec{H}\wedge\vec{v})=\left(\operatorname{div}\vec{v}-\frac{d\vec{v}}{dP}\right)\vec{H}-\left(\operatorname{div}\vec{H}-\frac{d\vec{H}}{dP}\right)\vec{v},$$

la (1), in virtù delle (2) e (4) porge:

$$(6)\qquad \frac{d\vec{H}}{dP}\vec{v}-\frac{d\vec{v}}{dP}\vec{H}=0.$$

Poichè si può scrivere anche

$$\vec{v}=\omega\frac{\partial P}{\partial\varphi},$$

essendo φ l'anomalia in un sistema di coordinate cilindriche (r, φ, z), e si ha inoltre $\frac{d\vec{v}}{dP}=\vec{\omega}\wedge$, la (6) diventa

$$(6')\qquad \frac{\partial\vec{H}}{\partial\varphi}-\vec{k}\wedge\vec{H}=0.$$

Indicando ora con $\vec{a}_r=\operatorname{grad} r$, $\vec{a}_\varphi=\frac{1}{r}\operatorname{grad}\varphi$ i versori delle direzioni secondo cui variano r, φ, e con H_r, H_φ H_z le componenti cilindriche di $\vec{H}$, dalla (6') moltiplicando scolarmente per $\vec{a}_r$, $\vec{a}_\varphi$, $\vec{k}$, e osservando che

$$\frac{\partial\vec{a}_r}{\partial\varphi}=\vec{a}_\varphi,\qquad \frac{\partial\vec{a}_\varphi}{\partial\varphi}=-\vec{a}_r,$$

si deduce facilmente

$$\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}=0, \qquad \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi}=0, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}=0.$$

Dunque, *nel caso di una massa fluida incompressibile, elettricamente conduttrice e uniformemente rotante intorno a un asse baricentrale Oz, in condizioni stazionarie le componenti del campo magnetico sono indipendenti dall'anomalia* φ, *si ha cioè simmetria intorno all'asse di rotazione.*

L'equazione (2) in coordinate cilindriche diventa perciò

(7) $$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r)+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0,$$

mentre H_φ sarà, per il momento, funzione arbitraria di r, z.

Dalla (7) segue che dovrà esistere una funzione $V(r, z)$ tale che sia

(8) $$H_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad H_z=\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r},$$

e quindi

(9) $$\begin{aligned}\vec{H} &= \operatorname{grad} V \wedge \operatorname{grad}\varphi + rH_\varphi \operatorname{grad}\varphi = \\ &= \operatorname{rot}(V \operatorname{grad}\varphi) + rH_\varphi \cdot \operatorname{grad}\varphi.\end{aligned}$$

3. Passando ora a considerare l'equazione idromagnetica (3), osserviamo intanto che con riferimento a una terna di assi cartesiani $Oxyz$, con gli assi Ox, Oy uniformemente rotanti intorno ad Oz con velocità angolare ω, si ha

$$\operatorname{rot}\vec{v}=2\vec{\omega}; \quad \operatorname{rot}\vec{v}\wedge\vec{v}=-\omega^2\operatorname{grad}(x^2+y^2); \quad v^2=\omega^2(x^2+y^2)$$

e pertanto la (3) diventa

(10) $$-\frac{\mu}{4\pi\rho_0}\operatorname{rot}\vec{H}\wedge\vec{H}+\operatorname{grad}\left[\frac{p}{\rho_0}-U-\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2)\right]=0.$$

Da questa segue che in condizioni di equilibrio relativo deve essere

(11) $$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{H}\wedge\vec{H})=0,$$

dove il campo magnetico $\vec{H}$ è definito dalla (9).

Se per semplicità si pone

(12) $$\nabla_2 V = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

risulta:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\vec{a}_r - \frac{1}{r}\nabla_2 V \cdot \vec{a}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) \cdot \vec{k},$$

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{rot} \vec{H} \wedge \vec{H} = -\left[\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\nabla_2 V}{r^2} + \frac{H_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right]\vec{a}_r +$$

$$+ \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right]\vec{a}_\varphi -$$

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\nabla_2 V}{r^2} + H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right)\vec{k},$$

e quindi

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{H} \wedge \vec{H}) = -\operatorname{grad}\left[\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\nabla_2 V}{r^2} + \frac{H_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right] \wedge \operatorname{grad} r +$$

$$+ \operatorname{grad}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right]\right\} \wedge \operatorname{grad} \varphi -$$

$$- \operatorname{grad}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\nabla_2 V}{r^2} + H_\varphi\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right) \wedge \operatorname{grad} z.$$

Uguagliando a zero le componenti di questo vettore, la condizione vettoriale (11) dà luogo alle seguenti tre condizioni scalari

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right]\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\nabla_2 V}{r^2} + H_\varphi\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\nabla_2 V}{r^2} + \frac{H_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)\right]\right\} = 0.$$

La prima e terza di queste condizioni porgono

$$\text{(14)} \qquad \frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\right] = C \text{ (costante)},$$

mentre la seconda si può scrivere

$$(15)\qquad \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nabla_2 V}{r^2}\right)-\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nabla_2 V}{r^2}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial H_\varphi^2}{\partial z}=0.$$

Osserviamo che la costante C deve essere necessariamente nulla. Infatti, se così non fosse si avrebbe nell'espressione (13) di rot $\vec{H} \wedge \vec{H}$ la componente $\frac{1}{r} C \vec{a}_\varphi = \text{grad}\,(C\varphi)$, e quindi nella (10) si verrebbe ad avere sotto il segno di gradiente una funzione $C\varphi$ non uniforme. Dunque $C = 0$, e pertanto la (14) diventa

$$(14')\qquad \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z}-\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}=0\cdot$$

Questa, in virtù delle (8), equivale alla seguente

$$H_z\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial z}+H_r\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}=0,$$

cioè, se indichiamo con $\vec{H}_m$ la componente del campo magnetico nel piano meridiano, si ha

$$(16)\qquad \vec{H}_m \times \text{grad}\,(rH_\varphi)=0,$$

Ora, se H_φ non è nullo e in un piano meridiano si considerano le linee $rH_\varphi = \text{cost.}$, il grad (rH_φ) è, in questo piano, un vettore ortogonale alle linee $rH_\varphi = \text{cost.}$, e la (16) mostra allora che *in un piano meridiano le linee di forza del campo magnetico meridiano coincidono con le linee $rH_\varphi = cost.$*

Per la (9) si ha inoltre

$$(17)\qquad \vec{H}_m = \text{grad}\ V \wedge \text{grad}\ \varphi \equiv \text{rot}\ (V\ \text{grad}\ \varphi),$$

da cui segue ancora che *in un piano meridiano il vettore H_m che rappresenta il campo magnetico meridiano è tangente in ogni punto alla linea $V = cost.$ passante per quel punto.*

Perciò, se si richiede che al contorno il campo magnetico sia diretto tangenzialmente, sul contorno deve essere $V = \text{cost.}$

4. La condizione (14') esprime anche che rH_φ deve essere funzione di V:

$$rH_\varphi = f(V), \tag{18}$$

e allora l'ulteriore condizione (15) diventa

$$\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nabla_2 V}{r^2}\right) - \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nabla_2 V}{r^2}\right) - \frac{2}{r^3} ff' \cdot \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \left(f' = \frac{df}{dV}\right),$$

la quale è identicamente verificata per

$$\nabla_2 V = -f(V) \cdot f'(V). \tag{19}$$

Assegnata la $f(V)$ e le condizioni al contorno la (19) definisce la funzione $V(r, z)$, e quindi in virtù delle (8) e della (18) risultano determinate le componenti del campo magnetico in ogni punto interno alla massa fluida.

Dalla (13) si ha poi

$$\text{rot}\, \vec{H} \wedge \vec{H} = 0$$

e l'equazione (10) fornisce l'integrale

$$\frac{p}{\rho_0} - U - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \text{cost.} \tag{20}$$

In tal caso dunque il campo magnetico non ha influenza sulla distribuzione delle pressioni, e per la massa fluida sono possibili figure ellissoidali rotonde.

Se ora poniamo uguale a zero la componente traversa H_φ del campo magnetico, la condizione (14') risulta identicamente verificata, mentre la (15) si riduce alla

$$\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\nabla_2 V}{r^2}\right) - \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\nabla_2 V}{r^2}\right) = 0,$$

la quale mostra che $\nabla_2 V/r^2$ deve essere uguale a una funzione $g(V)$ della V, e quindi

$$\nabla_2 V = r^2 g(V). \tag{21}$$

Anche in questo caso, assegnata la $g(V)$ e le condizioni al contorno, la (21) definisce la funzione V, dopo di che dalle (8) si hanno le componenti H_r, H_z del campo magnetico.

La (13) porge ora

$$\operatorname{rot} \vec{H} \wedge \vec{H} = - g(V)\left(\frac{\partial V}{\partial r}\, \vec{a}_r + \frac{\partial V}{\partial z}\, \vec{k}\right) =$$

$$= - g(V) \cdot \operatorname{grad} V = - \operatorname{grad} \int g(V) dV$$

e dalla (10) si deduce l'integrale

$$\frac{p}{\rho_0} - U - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{\mu}{4\mu\rho_0}\int g(V)dV = \text{cost.} \tag{22}$$

Allora, se al contorno si impone la condizione che il campo magnetico sia tangenziale, e quindi $V = \text{cost}$, e la pressione sia nulla (o costante), saranno ancora possibili per la massa fluida figure ellissoidali rotonde.

Casi particolari di notevole importanza si hanno:

1° Ponendo nella (18) $f(V) = kV$, con k costante, e quindi per la (19)

$$\nabla_2 V + k^2 V = 0. \tag{23}$$

2°. Assumendo nella (21) la g uguale a una funzione lineare di V:

$$g(V) = h_0 + h_1 V$$

e quindi

$$\nabla_2 V = r^2(h_0 + h_1 V),$$

con h_0 ed h_1 costanti. In questo caso l'integrale (22) che definisce la pressione diventa

$$\frac{p}{\rho_0} - U - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{\mu}{4\pi\rho_0}\left(h_0 V + \frac{1}{2} h_1 V^2\right) = \text{cost.}$$

Questi casi particolari, con riferimento alle figure ellissoidali, o sferoidali, che interessano la dinamica stellare, saranno analizzati in un successivo lavoro.