Bollettino Unione Matematica Italiana

Domingos Pisanelli

Sur l'intégration des fonctions rationnelles par des différences subdivisées.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.2, p. 139–141.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_2_139_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sur l'intégration des fonctions rationnelles par des différences subdivisées.

Nota di DOMINGOS PISANELLI (a S. Paolo, Brasile)

Le but de cette note est d'établir une formule qui permet de calculer l'intégrale définie d'une fonction rationnelle quelconque sous forme de différence subdivisée.

La formule à établir est la suivante:

$$(1) \qquad \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \Big[\underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_1}_{m_1} \; \underbrace{\alpha_2 \dots \alpha_2}_{m_2} \dots \underbrace{\alpha_r \dots \alpha_r}_{m_r}\Big] P(\alpha) \log \frac{b-\alpha}{a-\alpha}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes avec coefficients réels ou complexes ($Q(x)$ ayant premier coefficient égal a un), l'intégrale étant étendue à un chemin rectifiable entre a e b évitant les zéros de $Q(x)$, et les $\alpha_i (1 \leq i \leq r)$ sont les racines du dénominateur, chacune avec multiplicité m_i.

La formule (1) suppose en outre le degré de $P(x)$ plus petit que celui de $Q(x)$, en cas contraire on fera une division et l'intégration d'un polynôme.

1) Supposons la fonction à intégrer du type:

$$\frac{x^m}{(x-\alpha_1) \dots (x-\alpha_n)} \qquad (m < n).$$

On a

$$\frac{1}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}=\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{(\alpha_s-\alpha_1)\dots(\alpha_s-\alpha_{s-1})(\alpha_s-\alpha_{s+1})\dots(\alpha_s-\alpha_n)}\frac{1}{x-\alpha_s},$$

et

$$\int_a^b\frac{x^m}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}dx=\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{(\alpha_s-\alpha_1)\dots(\alpha_s-\alpha_{s-1})(\alpha_s-\alpha_{s+1})\dots(\alpha_s-\alpha_n)}\int_a^b\frac{x^m}{x-\alpha_s}dx$$

$$(2)\qquad \int_a^b\frac{x^m}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}dx=[\alpha_1\dots\alpha_n]_{\varphi_m}{*}\quad\left(\varphi_m(\alpha)=\int_a^b\frac{x^m}{x-\alpha}dx\right)$$

$$\int_a^b\frac{x^m}{x-\alpha}dx=\int_a^b\frac{x^m-\alpha^m}{x-\alpha}dx+\alpha^m\int_a^b\frac{1}{x-\alpha}dx=\frac{1}{m}(b^m-a^m)+$$

$$+\frac{1}{m-1}(b^{m-1}-a^{m-1})\alpha+\dots+(b-a)\alpha^{m-1}+\alpha^m\log\frac{b-\alpha}{a-\alpha}.$$

Substituons en (2), comme $m<n$ on aura simplement la différence subdivisée de $\alpha^m\log\dfrac{b-\alpha}{a-\alpha}$:

$$\int_a^b\frac{x^m}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}dx=[\alpha_1\dots\alpha_n]_{\alpha^m\log\frac{b-\alpha}{a-\alpha}}.$$

II) Supposons maintenant qu'on a à intégrer la fonction

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}.$$

* — $[\alpha_1\dots\alpha_n]\varphi_m$ est la différence subdivisée d'ordre n de la fonction φ_m relative aux points $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ ([1] — p. 7).

On aura d'aprés (2):

$$\int_a^b \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}\,dx = \sum_{m=0}^{p} a_m \int_a^b \frac{x^m}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}\,dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{p} a_m [\alpha_1 \dots \alpha_n]_{\alpha^m} \log\frac{b-\alpha}{a-\alpha} = \sum_{m=1}^{p} [\alpha_1 \dots \alpha_n]_{a_m \alpha^m} \log\frac{b-\alpha}{a-\alpha} =$$

$$= [\alpha_1 \dots \alpha_n]_{\Sigma a_m \alpha^m} \log\frac{b-\alpha}{a-\alpha}$$

$$\int_a^b \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)}\,dx = [\alpha_1 \dots \alpha_n]_{P(\alpha)\log\frac{b-\alpha}{a-\alpha}}. \tag{3}$$

III) Quand on a à intégrer

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}\dots(x-\alpha_r)^{m_r}},$$

on observe qu'en faisant tendre une racine vers une autre - le chemin ne contenant pas les racines du dénominateur - la convergence est uniforme. En faisant confluer $m_1, m_2, \dots, m_r$ des racines, on aura d'après (3):

$$\int_a^b \frac{P(x)}{(x-\alpha_1)^{m_1}\dots(x-\alpha_r)^{m_r}}\,dx = \Big[\underbrace{\alpha_1\dots\alpha_1}_{m_1}\ \underbrace{\alpha_2\dots\alpha_2}_{m_2}\ \dots\ \underbrace{\alpha_r\dots\alpha_r}_{m_r}\Big]_{P(\alpha)\log\frac{b-\alpha}{a-\alpha}}.$$

Rappelons que quand on calcule la différence subdivisée confluente d'une fonction, on substitue les différences subdivisées relatives aux points coincidents, par des dérivées. Par exemple on calcule $[\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2]_f$ de la manière suivante:

$$\begin{array}{llllll}
\alpha_1 & f(\alpha_1) & & & & \\
 & & f'(\alpha_1) & & & \\
\alpha_1 & f(\alpha_1) & & \frac{f''(\alpha_1)}{2} & & \\
 & & f'(\alpha_1) & & [\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_2]_f & \\
\alpha_1 & f(\alpha_1) & & [\alpha_1\alpha_1\alpha_2]_f & & [\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2]_f \\
 & & [\alpha_1\alpha_2]_f & & [\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2]_f & \\
\alpha_2 & f(\alpha_2) & & [\alpha_1\alpha_2\alpha_2]_f & & \\
 & & f'(\alpha_2) & & & \\
\alpha_2 & f(\alpha_2) & & & &
\end{array}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. M. Milne Thomson, *The Calculus of finite differences.*