Bollettino Unione Matematica Italiana

Marco Cugiani

Sull'approssimabilità di un numero algebrico mediante numeri algebrici di un corpo assegnato.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.2, p. 151–162.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_2_151_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

Sull'approssimabilità di un numero algebrico mediante numeri algebrici di un corpo assegnato.

Nota di Marco Cugiani (a Milano)

Sunto. - *Seguendo il metodo di* Roth-Leveque *si dimostra il seguente teorema*:

Se α *è algebrico di grado* $g \geq 2$ *sopra un assegnato corpo algebrico* K *e se* $\{\xi_i\}$ *è una successione di numeri primitivi di* K *per cui si ha*:

$$|\alpha - \xi_i| < q^{-(2+f(q_i))}$$

(*dove* q_i *è l'altezza di* ξ_i *ed* $f(q)$ *è una opportuna funzione,* $f(q) \to 0$ *per* $q \to +\infty$) *allora sarà*

$$\overline{\lim_{\to +\infty}} \frac{\log q_{i+1}}{\log q_i} = +\infty.$$

Summary. - *According to the* Roth-Leveque *method the following theorem is proved*:

Let K *be an algebraic number field and let* α *be an algebraic number of degree* $g \geq 2$ *over* K. *If* $\{\xi_i\}$ *is a sequence of primitive numbers of* K *such that:*

$$|\alpha - \xi_i| < q_i^{-(2+f(q_i))}$$

(q_i *denotes the height of* ξ_i *and* $f(q)$ *is a suitable function,* $f(q) \to 0$ *for* $q \to +\infty$) *then we have*:

$$\overline{\lim_{i \to +\infty}} \frac{\log q_{i+1}}{\log q_i} = +\infty.$$

I. - Introduzione - Risultati.

È ormai ben noto il recente risultato di K. F. Roth sulla approssimabilità di un numero algebrico mediante razionali (¹) Esso corona una lunga serie di ricerche, iniziate da J. Liouville oltre un secolo fa e continuate poi da numerosi ricercatori, tra cui ricorderemo soprattutto A. Thue, C. L. Siegel, J. Dyson e Th. Schneider.

(¹) Si veda: K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, «Mathematika», 2 (1955), 1-20.

Il teorema di ROTH può essere enunciato nella forma seguente: *se α è algebrico e se k è una costante reale > 2, allora la relazione*:

$$(1) \qquad |\alpha - p/q| < q^{-k}$$

può avere al più un numero finito di soluzioni in interi p, q, *con* (p, q) = 1.

Se α è irrazionale, come supporremo sempre nel seguito, la (1) ammette invece infinite soluzioni per ogni $k \leq 2$, come è noto dagli elementi della teoria delle frazioni continue. Il risultato di ROTH non è dunque ulteriormente migliorabile, almeno nel senso di abbassare il valore della costante k, può esserlo invece eventualmente nel senso di sostituire alla costante una funzione di q tendente a 2 dal di sopra abbastanza lentamente [2].

Ricordiamo poi che lo stesso ROTH ha enunciato e W. J. LEVEQUE ha esplicitamente dimostrato [3] un teorema che fornisce una interessante estensione del precedente enunciato richiamandosi al problema più generale di approssimare un numero algebrico mediante numeri algebrici di un assegnato corpo K.

Indichiamo con $H(\xi)$ *l'altezza del numero algebrico* ξ, cioè il massimo modulo dei coefficienti del polinomio $P(x)$, a coefficienti razionali interi, primitivo, di minimo grado, per cui risulta $P(\xi) = 0$; il teorema di ROTH-LEVEQUE può allora essere così enunciato [4]:

se K è un assegnato corpo algebrico ed α è algebrico di grado $g \geq 2$ sopra K, allora la disuguaglianza

$$|\alpha - \xi| < |H(\xi)|^{-k}$$

ammette al più un numero finito di soluzioni in numeri algebrici $\xi \in K$, se k è una costante > 2.

Noi qui intendiamo affrontare la questione sopra accennata, di sostituire alla costante k una opportuna funzione di q o di $H(\xi)$ se, come ci sembra opportuno, prendiamo come punto di partenza il teorema nella sua più generale seconda forma.

(2) Questo problema si trova proposto in: H. DAVENPORT and K. F. ROTH, *Rational approximations to algebraic numbers*, «Mathematika», 2 (1955), 160-167.

(3) Si veda: K. F. ROTH, loc. cit. in (1) ed inoltre, *Corrigendum*, «Mathematika», 2 (1955), 168; e: W. J. LEVEQUE, *Topics in Number Theory*, «Addison - Wesley pub. Co.», Reading (Mass), (1956), Vol. 2°, Cap. 4°.

Iniziando questa ricerca noi avevamo dunque di mira di individuare una opportuna funzione di q (d'ora in poi porremo ([5]) sistematicamente $q = H(\xi)$), che potremo indicare con $f(q)$, per cui risulti $f(q) \to 0$ per $q \to +\infty$, e tale che la relazione:

$$(2) \qquad |\alpha - \xi| < q^{-2-f(q)}, \qquad q = H(\xi)$$

abbia al più un numero finito di soluzioni, qualunque sia il numero α algebrico di grado $g \geq 2$ sopra il corpo K, nel quale si cercano i numeri ξ.

Allo stato attuale non sembra facile dare una risposta completamente esauriente al problema così posto ([6]). Un primo accostamento potrebbe essere quello di indicare una funzione $f(q)$ in corrispondenza della quale le soluzioni della (2) risultino «piuttosto rarefatte», quando non siano in numero finito. Il senso di questo discorso generico può essere concretato per esempio in un enunciato come quello del seguente teorema A, la cui dimostrazione costituirà lo scopo principale della presente nota.

Qui dovremo limitarci a considerare i *numeri primitivi* di K, quei numeri cioè il cui grado è uguale al grado del corpo; essi sono ovviamente i numeri generatori di K, poichè il minimo corpo che contiene uno di essi coincide con K, e non possono quindi appartenere ad alcun sottocorpo di K.

Possiamo ora enunciare il:

TEOREMA A. - *Sia α algebrico di grado $g \geq 2$ sopra un assegnato corpo algebrico K. Esista un numero reale $\varepsilon > 0$ e una successione $\{\xi_i\}$ di numeri primitivi di K tali che, posto $q_i = H(\xi_i)$, risulti:*

$$0 < q_i \leq q_{i+1}$$

ed inoltre:

$$(3) \qquad |\alpha - \xi_i| < q_i^{-(2+f(q_i))}$$

([4]) Si veda: W. J. LEVEQUE, loc. cit. in ([3]), alla pag. 148.

([5]) Questa identificazione non è del tutto in accordo con le precedenti posizioni nel caso che il corpo K sia l'ordinario campo razionale, in tal caso infatti l'altezza del numero $\xi = p/q$ coincide con q solo se $\xi < 1$. È ovvio però che se α è algebrico, anche Mant α è algebrica, dello stesso grado, e quest'ultima potrà essere approssimata solo con frazioni proprie, appena q è abbastanza grande.

([6]) A questo proposito si veda anche quanto è detto in loc. cit. in ([2]) pag. 161. Si osservi che tra le possibili risposte vi è anche quella negativa, potrebbe darsi cioè che non esista una $f(q)$ conveniente per tutti gli α.

essendo

$$f(q_i) = (8g + \varepsilon)(\log\log\log q_i)^{-\frac{1}{2}}.$$

Allora se la $\{\xi_i\}$ *è infinita esisteranno infiniti* ξ_i *per i quali si ha:*

$$q_{i+1} > q_i^{\Delta} \tag{4}$$

qualunque sia Δ.

In altre parole, se la $\{\xi_i\}$ *è infinita risulterà:*

$$\overline{\lim_{i \to +\infty}} \frac{\log q_{i+1}}{\log q_i} = +\infty.$$

Osservando che nel campo razionale tutti i numeri sono primitivi (eccettuato il solo zero) se ne deduce come immediato corollario il seguente:

TEOREMA B. - *Se* α *è algebrico di grado* $g \geq 2$ *e se esistono un numero* $\varepsilon > 0$ *e una successione di numeri razionali* p_i/q_i *con* $(p_i, q_i) = 1$, $0 < q_i \leq q_{i+1}$, *per cui risulti:*

$$|\alpha - p_i/q_i| < q_i^{-(2+f(q_i))} \tag{3'}$$

essendo

$$f(q_i) = (8g + \varepsilon)(\log\log\log q_i)^{-\frac{1}{2}};$$

allora o la successione dei numeri p_i/q_i *sarà finita, ovvero si avrà:*

$$\overline{\lim_{i \to +\infty}} \frac{\log q_{i+1}}{\log q_i} = +\infty.$$

Questo enunciato si richiama a classiche proposizioni di SIEGEL e SCHNEIDER relative al caso k costante > 2, che erano state prese in considerazione prima che ROTH giungesse a dimostrare il suo teorema (7).

II. Due lemmi preliminari.

Per la dimostrazione del nostro teorema ci serviranno due lemmi, che desumiamo direttamente dalla citata opera del LEVEQUE.

Se $P(x)$ è un polinomio a coefficienti complessi, indichiamo con $\|P\|$ il massimo modulo di tali coefficienti. Il primo lemma può essere allora così enunciato (8).

(7) A questo proposito si veda ad esempio: Th. SCHNEIDER, *Ueber die approximation algebraischer Zahlen*, «J. reine u. angew. Math.», **175** (1936), 182-192.

(8) Si veda: W. J. LEVEQUE, loc. cit. in (3), il teorema 4-2 alla pag 124.

LEMMA 1. - *Siano l, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ numeri complessi, e poniamo:*

$$P(x) = l(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_h);$$

avremo allora:

$$|l| \cdot (1+|\lambda_1|) \cdot (1+|\lambda_2|) \ldots (1+|\lambda_h|) \leq 6^h \, \| P \|.$$

All'enunciato del secondo lemma dovremo premettere la nozione di *indice di un polinomio in un punto, in rapporto a una m-pla di numeri positivi.*

Sia $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un polinomio in m variabili, non identicamente nullo. Consideriamo un punto dello spazio m-dimensionale $A \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ dove le coordinate α_i saranno numeri complessi qualunque, ed assegnamo arbitrariamente una m-pla di numeri reali positivi: $r_1, r_2, \ldots, r_m$.

Scriviamo lo sviluppo di P nell'intorno di A nella forma:

$$P(\alpha_1 + y_1, \alpha_2 + y_2, \ldots, \alpha_m + y_m) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m} c_{i_1, i_2, \ldots, i_m} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \ldots y_m^{i_m}.$$

L'espressione:

$$\theta = \frac{i_1}{r_1} + \frac{i_2}{r_2} + \ldots + \frac{i_m}{r_m}$$

è funzione degli esponenti $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Il minimo dei valori assunti da θ in corrispondenza delle m-ple $i_1, i_2, \ldots, i_m$, scelte in modo che siano diversi da zero i corrispondenti coefficienti $c_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$, si chiamerà *l'indice del polinomio P, nel punto A, in rapporto alla m-pla $r_1, r_2, \ldots, r_m$*. Abbiamo cioè

$$\operatorname{ind} P = \bar{\theta}(P; A; r_1, r_2, \ldots, r_m) = \min_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_m \\ c_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \neq 0}} \sum_{s=1}^{m} \frac{i_s}{r_s}.$$

Si osservi che l'indice è un numero essenzialmente non negativo, che si annulla solo se

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \neq 0.$$

Supponiamo ora di aver fissato:

a) un numero naturale m;

b) un numero reale positivo δ;

c) una m-pla di numeri algebrici $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ appartenenti a un assegnato corpo K e rispettivamente di altezza $q_1, q_2, \ldots, q_m$;

d) una m-pla di numeri naturali $r_1, r_2, \ldots, r_m$;
in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$0 < \delta < \frac{\gamma_1}{m \cdot 2^m} \tag{5}$$

$$10^m \delta^{\left(\frac{1}{2}\right)^m} + 2(1 + 3\delta) g m^{\frac{1}{2}} < \frac{m}{2} \tag{6}$$

$$r_m > \frac{10}{\delta}; \quad \frac{r_{i-1}}{r_i} > \frac{1}{\delta} \quad \textit{per } i = 2, 3, \ldots, m \tag{7}$$

$$\delta^2 \log q_1 > \gamma_2 m + \gamma_3 \tag{8}$$

$$r_i \log q_i \geq r_1 \log q_1 \qquad \textit{per } i = 2, 3, \ldots, m \tag{9}$$

$$\log q_1 > \frac{\gamma_4}{\delta} \tag{10}$$

dove $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sono delle costanti che dipendono solo dal numero α e dal corpo K (9).

Definiamo poi le grandezze λ, μ, η, B attraverso le relazioni:

$$\lambda = 4(1 + 3\delta) g m^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

$$\mu = \frac{1}{2}(m - \lambda) \tag{12}$$

$$\eta = 10^m \delta^{\left(\frac{1}{2}\right)^m} \tag{13}$$

$$B = [q_1^{\delta r_1}] \tag{14}$$

e potremo allora enunciare nella seguente forma il fondamentale (9):

(9) Si veda: W. J. LEVEQUE, loc. cit. in (3), pag. 144 e segg., il teorema 4·14 e relative premesse.

LEMMA 2. - *Sia α un intero algebrico di grado g sopra il corpo algebrico K e siano fissate le grandezze a), b), c), d) in modo da soddisfare alle relazioni da (5) a (10). Esiste allora un polinomio, $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ con coefficienti interi algebrici appartenenti a K, e di grado al più r_ι in ciascuna x_ι, tale che:*

A) l'indice di F nel punto $(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$ in rapporto alla m-pla $r_1, r_2, \dots, r_m$ è almeno uguale a $\mu - \eta$;

B) $F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \neq 0$;

C) per i moduli del polinomio F e delle sue derivate vale la limitazione:

$$| F_{i_1, i_2, \dots, i_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) | < B^{1+3\delta} \cdot \prod_{j=1}^{m} (1 + | x_j |)^{r_j}$$

dove si è posto:

$$F_{i_1, i_2, \dots, i_m} = \frac{1}{i_1 ! \, i_2 ! \dots i_m !} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{m} F.$$

La corrispondente disuguaglianza vale ancora se i coefficienti di F vengono sostituiti dagli elementi a loro corrispondenti in uno dei corpi coniugati di K.

Notiamo infine che nel corso della dimostrazione di questa proposizione risulta tra l'altro provato che detto a il massimo modulo di α e dei suoi coniugati si ha:

$$(15) \qquad (r_1 + 1)(r_2 + 1) \dots (r_m + 1) \leq 2^{r_1 + r_2 + \dots + r_m} < (1 + a)^{m r_1} < B^{\delta}.$$

III. Preliminari alla dimostrazione - Determinazione delle grandezze *a*), *b*), *c*), *d*).

Dovremo premettere una

OSSERVAZIONE. - Nel corso della dimostrazione potremo supporre che α sia un intero algebrico.

Infatti, se così non fosse, esisterebbe un intero razionale $b > 0$, tale che $b\alpha$ sia un intero algebrico. Allora da ogni relazione del tipo:

$$(2) \qquad | \alpha - \xi | < q^{-(2+f(q))} \qquad (q = H(\xi))$$

si dedurrebbe:

$$|b\alpha - b\xi| < \frac{b}{q^{2+f(q)}} < \frac{b^{3N+1}}{|H(b\xi)|^{2+f(q)}}$$

dove N è il grado del corpo K.

Posto ora: $q^* = H(b\xi)$, avremo:
$q/b^N \leq q^* \leq qb^N$, e quindi, per $q \to +\infty$:

$$\log\log\log q^* = \log\log\log q + o(1).$$

Scelto allora un $\varepsilon^* < \varepsilon$ $(\varepsilon^* > 0)$, e posto:

$$f^*(q) = (8g + \varepsilon^*)(\log\log\log q)^{-\frac{1}{2}}$$

sarà:

$$f(q) - f^*(q^*) \sim (\varepsilon - \varepsilon^*)(\log\log\log q)^{-1/2}, \qquad \text{per } q \to +\infty$$

e anche

$$(q^*)^{f(q)-f^*(q^*)} \to +\infty, \qquad \text{per } q \to +\infty,$$

e quindi:

$$b^{3N+1}/|H(b\xi)|^{2+f(q)} < (q^*)^{-2-f^*(q^*)}$$

per q abbastanza grande.

Da ogni soluzione della (2), con $H(\xi)$ abbastanza grande, si ricaverebbe dunque:

$$(16) \qquad |b\alpha - b\xi| < (q^*)^{-(2+f^*(q^*))}.$$

Quindi se il teorema non fosse vero per il numero α algebrico non intero, non sarebbe vero nemmeno per l'intero algebrico $b\alpha$, poichè se esistesse una successione di numeri ξ_i, soddisfacenti la (2), e tali che per i abbastanza grande si avesse:

$$q_{i+1} < q_i^{\Delta} \qquad \text{per un certo } \Delta,$$

si dedurrebbe:

$$(17) \qquad q_{i+1}^* < q_{i+1}b^N < q_i^{\Delta}b^N < (q_i^* b^N)^{\Delta}b^N = (q_i^*)^{\Delta+1}\frac{b^{N(\Delta+1)}}{q_i^*} < (q_i^*)^{\Delta+1}$$

per i abbastanza grande; esisterebbe dunque una successione di numeri $b\xi_i$, soddisfacenti alla (16) e alla (17), il che, tenuto conto della arbitrarietà di ε e di Δ, contraddice appunto il nostro teorema.

Passiamo ora a determinare le quantità m, δ, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, $r_1, r_2, \ldots, r_m$, in modo che siano soddisfatte le condizioni per la validità del lemma 2°, oltre ad altre relazioni che ci serviranno nel seguito.

La dimostrazione del teorema A procederà per assurdo e cominceremo dunque a supporre che, dato l'intero algebrico α di grado $g \geq 2$ sopra K, esistano un numero Δ, abbastanza grande, $\varepsilon > 0$, abbastanza piccolo, e una successione di numeri ξ_ι, per cui si abbia ($q_\iota = H(\xi_\iota)$):

$$q_\iota \leq q_{\iota+1};$$

(3) $$|\alpha - \xi_\iota| < q_\iota^{-(2+f(q_\iota))}$$

(18) $$q_{\iota+1} < q_\iota^{\Delta}.$$

Poniamo $\delta = e^{-e^m}$ e scegliamo m, intero, abbastanza grande, in modo che siano definitivamente soddisfatte la (5) e la (6) e che inoltre si abbia:

(19) $$\frac{m(1+\delta)+3N\delta}{\mu-\eta} = \frac{m+o(1)}{\frac{1}{2}m - 2gm^{\frac{1}{2}} + o(1)} =$$

$$= (2+o(m^{-1}))(1+4gm^{-\frac{1}{2}} + o(m^{-\frac{1}{2}})) < 2 + \frac{8g+\varepsilon/2}{\sqrt{m}}$$

dove N, al solito, è il grado di K. Decidiamo poi di chiamare q_1 il primo dei q_ι per cui sia: $\log q_1 \geq m^2 e^{2e^m}$, e poniamo esattamente

(20) $$\log q_1 = cm^2 e^{2e^m}.$$

A causa di (18) risulterà evidentemente:

$$1 \leq c < \Delta.$$

Facciamo eventualmente aumentare ancora m, e conseguentemente anche δ e q_1, in modo che siano soddisfatte anche la (8) e la (10), mentre continueranno naturalmente a valere la (5), la (6), la (19).

Scegliamo adesso un sottoinsieme $\{\xi_j\}$ della successione $\{\xi_\iota\}$, in cui agli indici j attribuiremo i valori $1, 2, \ldots, m$, e i cui elementi saranno: ξ_1, corrispondente all'altezza q_1 già fissata, ed altri $m-1$:

$\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_m$, le cui altezze soddisfino alle relazioni:

$$\text{(21)} \qquad \log q_j/\log q_{j-1} > 2\delta^{-1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, m).$$

Scegliamo anche un numero r_1, intero razionale per cui si abbia:

$$\text{(22)} \qquad r_1 > (10 \log q_m)/(\delta \log q_1)$$

e definiamo $r_2, r_3, \ldots, r_m$ interi, colle relazioni:

$$\text{(23)} \qquad \frac{r_1 \log q_1}{\log q_j} \leq r_j < \frac{r_1 \log q_1}{\log q_j} + 1.$$

Risulta così soddisfatta la (9) e inoltre avremo per (23) e (22)

$$\text{(24)} \qquad \frac{r_j \log q_j}{r_1 \log q_1} < 1 + \frac{\log q_j}{r_1 \log q_1} \leq 1 + \frac{\log q_m}{r_1 \log q_1} < 1 + \frac{\delta}{10}$$

e anche le condizioni (7) saranno soddisfatte essendo, per le (23), (22) e (24), (23), (21):

$$r_m \geq \frac{r_1 \log q_1}{\log q_m} > \frac{10}{\delta}; \quad \frac{r_{j-1}}{r_j} > \frac{\log q_j}{\log q_{j-1}} \left(1 + \frac{\delta}{10}\right)^{-1} > \frac{1}{\delta}.$$

Notiamo qui che a causa della ipotesi (18), se nella scelta di q_j ci regoliamo ogni volta in modo che esso sia il minimo dei q_i per cui risulta soddisfatta la (21), avremo anche:

$$\log q_j/\log q_{j-1} \leq 2\Delta\delta^{-1} = 2\Delta e^{e^m}.$$

In particolare ne risulterà soddisfatta la relazione:

$$q_m < q_1^{(2\Delta)^m \cdot e^{me^m}}$$

Avremo dunque, ricordando la (20):

$$\log \log \log q_m \leq m + \log m + O\left(\frac{1}{m}\right)$$

e quindi:

$$f(q_m) = \frac{8g + \varepsilon}{(\log \log \log q_m)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{8g + \varepsilon}{m^{\frac{1}{2}} + o(1)}.$$

Sarà dunque, a causa di (19):

$$(25) \qquad 2 + f(q_m) > \frac{m(1+\delta) + 3N\delta}{\mu - \eta},$$

per m abbastanza grande. Aumentiamo eventualmente ancora m in modo che anche la (25) sia soddisfatta. Naturalmente varieranno in conseguenza anche gli altri parametri, e si manterranno valide tutte le precedenti relazioni.

IV. Dimostrazione del teorema *A*.

Consideriamo adesso il polinomio $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ di cui il lemma 2° ci garantisce l'esistenza, fornito delle proprietà colà precisate. Poichè $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ sono numeri primitivi di K, ognuno di essi sarà radice di un polinomio in x a coefficienti interi razionali, il cui termine di grado più elevato indicheremo con $k_j x^N$. Il numero

$$\varphi = F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

è un elemento di K. Se i corpi coniugati di K sono $K', K'', \dots, K^{(N-1)}$ (eventualmente tutti o in parte coincidenti) e se $\xi', \xi'', \dots, \xi^{(N-1)}$ sono gli elementi (tutti distinti per l'ipotesi che ξ è primitivo) corrispondenti di ξ in tali corpi, allora la norma di φ, che indicheremo con $N\varphi$, è una somma di prodotti di potenze di $\xi_j^{(\nu)}$ ($j = 1, 2, \dots, m$; $\nu = 0, i, \dots, N-1$) con coefficienti interi di K, ed in tali prodotti ciascun fattore formato dalla potenza di un certo $\xi_j^{(\nu)}$ è al più di grado r_j, per le proprietà del polinomio F. Per note proprietà dei numeri algebrici il prodotto di k_j per un qualunque insieme di coniugati distinti di ξ_j è un intero algebrico. Essendo gli $\xi_j^{(\nu)}$ tutti distinti, il prodotto:

$$k_1^{r_1} k_2^{r_2} \dots k_m^{r_m} \cdot N\varphi$$

è un intero algebrico razionale, e quindi si ha:

$$(26) \qquad | k_1^{r_1} \cdot k_2^{r_2} \dots k_m^{r_m} \cdot N\varphi | \geq 1.$$

D'altra parte abbiamo, considerando lo sviluppo di F nell'intorno del punto $A(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$:

$$\varphi = F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{r_1} \dots \sum_{i_m=0}^{r_m} F_{i_1 i_2, \dots, i_m}(\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \cdot (\xi_1 - \alpha)^{i_1} (\xi_2 - \alpha)^{i_2} \dots (\xi_m - \alpha)^{i_m}$$

e per il lemma 2°, punto A), i termini pei quali si ha:

$$\frac{i_1}{r_1}+\frac{i_2}{r_2}+\dots+\frac{i_m}{r_m}<\mu-\eta$$

sono tutti nulli. In tutti gli altri abbiamo per la (3) e per la (9):

$$|(\xi_1-\alpha)^{r_1}(\xi_2-\alpha)^{r_2}\dots(\xi_m-\alpha)^{r_m}|<(q_1^{i_1}\cdot q_2^{i_2}\dots q_m^{i_m})^{-(2+f(q_m))}<$$

$$<\left(q_1^{\frac{i_1}{r_1}}q_1^{\frac{i_2}{r_2}}\dots q_1^{\frac{i_m}{r_m}}\right)^{-(2+f(q_m))r_1}.$$

Quindi, per il lemma 2°, punto C) e per la (15) avremo:

$$|\varphi|<(r_1+1)(r_2+1)\dots(r_m+1)\cdot B^{1+3\delta}\cdot(1+a)^{mr_1}\cdot q_1^{-r_1(\mu-\eta)(2+f(q_m))}<$$

$$<B^{1+5\delta}\cdot q_1^{-r_1(\mu-\eta)\{2+f(q_m)\}}.$$

Ora, sfruttando ancora il lemma 2°, punto C), e il lemma 1°, otteniamo:

$$|k_1^{r_1}k_2^{r_2}\dots k_m^{r_m}\cdot N\varphi|<$$

$$<B^{1+5\delta}\cdot q_1^{-r_1(\mu-\eta)\{2+fq_m)\}}\cdot B^{(N-1)(1+3\delta)}\cdot\prod_{j=1}^{m}\left\{k_j\cdot\prod_{\nu=0}^{N-1}(1+|\xi_j^{(\nu)}|)\right\}^{r_j}<$$

$$<B^{N(1+5\delta)}\cdot q_1^{-r_1(\mu-\eta)\{2+f(q_m)\}}\cdot\prod_{j=1}^{m}(6^N q_j)^{r_j},$$

e per la (15) e la (14):

$$6^{N\Sigma r_j}<2^{3N\Sigma r_j}<B^{3N\delta}<q_1^{3\delta^2Nr_1}<q_1^{\delta Nr_1}.$$

Avremo adesso per (14) e (24):

$$|k_1^{r_1}k_2^{r_2}\dots k_m^{r_m}\cdot N\varphi|<$$

$$<q_1^{\delta Nr_1(1+5\delta)+\delta Nr_1-r_1(\mu-\eta)\{2+fq_m)\}}\cdot\prod_{j=1}^{m}q_j^{r_j}<$$

$$<q_1^{\delta Nr_1(2+5\delta)-r_1(\mu-\eta)\{2+f(q_m)\}+mr_1(1+\delta)}.$$

Questo, insieme alla (26), comporta:

$$2+f(q_m)<\frac{m(1+\delta)+\delta N(2+5\delta)}{\mu-\eta}<\frac{m(1+\delta)+3\delta N}{\mu-\eta},$$

il che è in evidente contrasto colla (25). Da questa contraddizione risulta provato il teorema A.