Bollettino
Unione Matematica Italiana

Cataldo Agostinelli

Sul moto di un elettrone veloce in un campo elettromagnetico simmetrico rispetto a un asse.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.2, p. 163–174.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_2_163_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1959.

Sul moto di un elettrone veloce in un campo elettromagnetico simmetrico rispetto a un asse.

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino)

Sunto. - *Come nel n° 1.*

1. In questa nota, riferendomi ai miei lavori di oltre vent'anni or sono [1], in cui mi occupavo del probrema del moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di dipolo magnetico, o più in generale in un campo magnetico stazionario simmetrico rispetto a un asse, problema che interessa lo studio delle *aurore boreali,* estendo ora le equazioni fondamentali ivi stabilite al caso del movimento di un elettrone, di massa relativistica, in un campo elettromagnetico, retto dalle equazioni di MAXWELL, simmetrico rispetto a un asse.

Questo problema ha, come si sa, molta importanza negli studi delle *macchine acceleratrici di elettroni* e specialmente nel *betatrone* ideato da KERST nel 1939 [2].

Introducendo una funzione del campo $V(r, z, t)$ dipendente dalle coordinate cilindriche r. z e dal tempo t, ma non dall'anomalia φ, riduco innanzitutto la determinazione delle componenti del campo elettrico e del campo magnetico alla risoluzione di un'equazione differenziale alle derivate parziali, analoga all'equazione delle onde in cui è incognita la sola funzione V.

Scrivendo poi le equazioni del moto dell'elettrone. dimostro subito l'esistenza dell'integrale del momento della quantità di

[1] C. AGOSTINELLI, *Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico* (« Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino », vol. 73, a. 1937-38). IDEM, *Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in un campo magnetico simmetrico rispetto a un asse ecc.* (« Idem » vol. 74. a. 1938-39). IDEM, *Sulla risoluzione analitica del problema del moto di un corpuscolo eletrizzato in presenza di un dipolo magnetico* (« Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino », Serie 2ª, Tomo 69, Parte I, a. 1938-39), p. 4?5.

[2] Cfr. E. PERSICO, *Gli atomi e la loro energia*, p. 465, (Zanichelli Bologna, 1959).

moto e, per mezzo di esso, con riferimento al così detto *tempo proprio,* riduco il problema del moto a quello del moto piano di un punto di massa unitaria soggetto a una forza che deriva da un potenziale.

Queste equazioni non ammettono però l'integrale dell'energia poichè il potenziale dipende esplicitamente dal tempo.

Dopo ciò ho stabilito le condizioni perchè il moto dell'elettrone avvenga nel piano $z = 0$ e su orbite circolari, come appunto avviene nelle macchine acceleratrici a cui ho accennato. Conseguentemente ho potuto confermare la nota proprietà che il valore del campo magnetico su un'orbita circolare è, in ogni istante, uguale alla metà del valore medio nell'interno del cerchio ([3]).

Ho considerato infine il caso di un campo elettromagnetico sinusoidale rispetto al tempo avente una componente dipendente soltanto dalla coordinata radiale r, e una seconda componente funzione ancora di r, ma variabile sinusoidalmente con z. In questo caso, se è fissato il campo, si ha solo uno spettro di raggi corrispondenti a possibili traiettorie circolari; ma si può anche disporre del rapporto delle intensità delle due componenti anzidette, in modo che il movimento avvenga su una circonferenza di raggio assegnato ad arbitrio.

2. L'equazione vettoriale del moto di un elettrone dotato di carica elettrica e, mobile con velocità $\vec{v}$ in un mezzo di permeabilità magnetica μ e costante dielettrica ε, sotto l'azione di un campo elettromagnetico $(\vec{E}, \vec{H})$, è, come si sa:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e(\vec{E} + \frac{\mu}{c}\,\vec{v} \wedge \vec{H}), \tag{1}$$

dove m è la sua massa relativistica, definita dalla

$$m = m_0 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{2}$$

essendo m_0 la massa a riposo e c la velocità della luce.

([3]) Cfr. E. Persico, *loco citato* in ([2]).

Il secondo membro della (1) risulta composto della forza dovuta al campo elettrico e della forza deflettente di LORENTZ.

Nell'ipotesi che la carica dell'elettrone non influenzi il campo, e che in questo non vi siano altre cariche elettriche, le equazioni maxwelliane del campo elettromagnetico sono

$$(3)\qquad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad\qquad (4)\qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$(5)\qquad \operatorname{div}\vec{E} = 0, \qquad\qquad (6)\qquad \operatorname{div}\vec{H} = 0.$$

Prendendo il rotore di ambo i membri della (3) e tenendo conto della (4), si ha che il campo magnetico $\vec{H}$ deve verificare l'equazione

$$(7)\qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

alla quale va associata la (6).

Se ora supponiamo che il campo sia simmetrico rispetto a un asse, che assumiamo come asse z e con riferimento a coordinate cilindriche r, φ, z, indichiamo con H_r, H_φ, H_z le componenti del campo magnetico, supponendo inoltre nulla la componente traversa H_φ, l'equazione (6) diventa

$$(6')\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

e introducendo una funzione $V(r, z, t)$ del campo, si ha che la (6') è identicamente soddisfatta ponendo

$$(8)\qquad H_r = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad H_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Segue

$$(9)\qquad \vec{H} = H_r \operatorname{grad} r + H_z \operatorname{grad} z = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}\operatorname{grad} r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\operatorname{grad} z$$

cioè

$$(9')\qquad \vec{H} = -\operatorname{grad} V \wedge \operatorname{grad}\varphi.$$

Ponendo

$$(10)\qquad \nabla_2 V = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

dalla (9) si ricava

$$\text{rot}\,\vec{H} = \nabla_2 V \cdot \text{grad}\,\varphi \tag{11}$$

e quindi

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\vec{H} = \text{grad}\,\nabla_2 V \wedge \text{grad}\,\varphi. \tag{12}$$

L'equazione (7) diventa allora

$$\text{grad}\,\nabla_2 V \wedge \text{grad}\,\varphi - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\,\text{grad}\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \wedge \text{grad}\,\varphi = 0, \tag{13}$$

che dà luogo alle seguenti equazioni scalari

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla_2 V - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla_2 V - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) = 0, \tag{13'}$$

dove si è posto

$$v_0 = c/\sqrt{\mu\varepsilon}. \tag{14}$$

Le (13') trascurando una inessenziale funzione arbitraria del tempo, porgono

$$\nabla_2 V - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \tag{15}$$

Determinata la funzione V in modo da verificare la (15), le (8) danno le componenti H_r, H_z del campo magnetico. Inoltre la (3), in virtù della (11) diventa

$$\nabla_2 V \cdot \text{grad}\,\varphi = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

e quindi, per la (15),

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{c}{\varepsilon}\frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \cdot \text{grad}\,\varphi,$$

dalla quale, prescindendo da un campo elettrico stazionario, si deduce

$$\vec{E} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial V}{\partial t}\,\text{grad}\,\varphi, \tag{16}$$

la quale fornisce il campo elettrico $\vec{E}$ per mezzo della stessa funzione V.

3. Sostituendo ora nella (1) in luogo di $\overrightarrow{E}$ e di $\overrightarrow{H}$ i valori definiti dalle equazioni (16) e (9'), l'equazione del moto dell'elettrone diventa

$$\frac{d}{dt}(m\overrightarrow{v}) = \frac{e\mu}{c}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi + \overrightarrow{v}\wedge(\operatorname{grad}\varphi\wedge\operatorname{grad}V)\right\}. \tag{17}$$

Poichè risulta

$$\frac{\partial V}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi + \overrightarrow{v}\wedge(\operatorname{grad}\varphi\wedge\operatorname{grad}V) =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{grad}V\times\overrightarrow{v}\right)\operatorname{grad}\varphi - \operatorname{grad}\varphi\times\overrightarrow{v}\cdot\operatorname{grad}V$$

ed è

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{grad}V\times\overrightarrow{v} = \frac{dV}{dt}, \qquad \operatorname{grad}\varphi\times\overrightarrow{v} = \frac{d\varphi}{dt},$$

si ha ancora

$$\frac{d}{dt}(m\overrightarrow{v}) = \frac{e\mu}{c}\left(\frac{dV}{dt}\operatorname{grad}\varphi - \frac{d\varphi}{dt}\operatorname{grad}V\right), \tag{18}$$

la quale è formalmente identica all'equazione (19') stabilita nella nota prima citata in (1). salvo che ora nella (18) la massa m è variabile secondo la legge relativistica espressa dalla (2), dove è

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$$

Con lo stesso procedimento seguito in quella nota, dalla (18) si ottengono le seguenti equazioni scalari

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\varphi}^2 = -\frac{e\mu}{c}\dot{\varphi}\frac{\partial V}{\partial r} \\ (19)\qquad &\frac{d}{dt}(m\dot{z}) \qquad\quad = -\frac{e\mu}{c}\dot{\varphi}\frac{\partial V}{\partial z} \\ &\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) \qquad = \frac{e\mu}{c}\frac{dV}{dt}. \end{aligned}$$

Dalla terza delle (19) segue subito l'integrale del momento della quantità di moto

$$mr^2\dot{\varphi} = \frac{e\mu}{c}(V + C) \tag{20}$$

con C costante arbitraria, che si può porre uguale a zero essendo la funzione V definita a meno di una costante additiva, e pertanto l'integrale (20) diventa

$$mr^2\dot{\varphi} = \frac{e\mu}{c} V. \tag{20'}$$

Moltiplicando ora per m ambo i membri delle prime due equazioni (19) ed eliminando la velocità angolare $\dot{\varphi}$ per mezzo della (20') si ottiene

$$m\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = \left(\frac{e\mu}{c}\right)^2 \left(\frac{V^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} V \frac{\partial V}{\partial r}\right)$$

$$m\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = -\left(\frac{e\mu}{c}\right)^2 \frac{V}{r^2}\frac{\partial V}{\partial z},$$

cioè

$$\begin{aligned} m\frac{d}{dt}(m\dot{r}) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{e\mu}{c}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V}{r}\right)^2 \\ m\frac{d}{dt}(m\dot{z}) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{e\mu}{c}\right)^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V}{r}\right)^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Lo studio del moto dell'elettrone si riduce dunque allo studio delle equazioni (21), le quali, quando sia nota la funzione $V(r, z, t)$, soddisfacente alla (15), definiscono le coordinate r, z della particella in funzione del tempo.

Esse si riducono alle equazioni del moto piano di un punto di massa unitaria soggetto a una forza derivante dal potenziale

$$U = -\frac{1}{2}\left(\frac{e\mu}{cm_0}\right)^2 \left(\frac{V}{r}\right)^2,$$

assumendo come variabile indipendente al posto del tempo t, il *tempo proprio* τ definito dalla relazione differenziale

$$d\tau = \frac{m_0}{m} dt \equiv \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt.$$

Le equazioni (21), come le loro trasformate, non ammettono però l'integrale dell'energia, essendo la funzione V, e quindi il potenziale U, dipendente esplicitamente dal tempo, contrariamente a quanto avviene nel caso in cui il corpuscolo si muova in un campo elettromagnetico stazionario.

4. Dalla seconda delle (21) risulta che affinchè per l'elettrone siano possibili dei moti del piano $z=0$, deve essere $V=0$, per $z=0$, oppure $\frac{\partial V}{\partial z}=0$, per $z=0$. Escludiamo il primo caso poichè allora in virtù della (16) sarebbe nullo il campo elettrico nel piano $z=0$, e per la (20′) sarebbe anche nullo il momento della quantità di moto dell'elettrone. Sarà dunque

$$\frac{\partial V}{\partial z}=0, \qquad \text{per } z=0. \tag{22}$$

Quando questa condizione è soddisfatta, in virtù della prima delle (21) la traiettoria sarà *circolare* ($\dot{r}=0$), se in ogni istante è ancora

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V}{r}\right)=0, \qquad \text{per } z=0, \tag{23}$$

ovvero

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{V}{r^2}=0, \qquad \text{per } z=0. \tag{23′}$$

Quest' ultima equazione fornirà i valori r_0 dei raggi delle traiettorie circolari, ciascuna delle quali, in virtù della (20′) e della (2) verrà percorsa con una velocità angolare $\dot{\varphi}$ definita dalla relazione

$$\frac{m_0 r_0^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{r_0^2\dot{\varphi}^2}{c^2}}}=\frac{e\mu}{c}V_0(t), \tag{24}$$

dove con $V_0(t)$ si è indicato il valore della funzione $V(r, z, t)$ per $r=r_0$ e $z=0$.

Si ricava quindi

$$\left(\frac{r_0\dot{\varphi}}{c}\right)^2=\frac{\left(\frac{e\mu}{c}\right)^2 V_0^2(t)}{m_0^2 r_0^2 c^2+\left(\frac{e\mu}{c}\right)^2 V_0^2(t)}$$

e corrispondentemente si ha

$$m = \sqrt{m_0^2 + \left(\frac{e\mu}{c}\right)^2 \frac{V_0^2(t)}{r_0^2 c^2}}. \tag{24'}$$

Osserviamo che in questo caso, per la prima delle (8) sarà $H_r = 0$, per $z = 0$, cioè nel piano $z = 0$ il campo magnetico sarà tutto assiale. Se consideriamo allora il valor medio H_m del campo magnetico entro il cerchio r_0 di una data traiettoria circolare del piano $z = 0$, avremo per la seconda delle (8)

$$H_m = \frac{1}{\pi r_0^2} \iint_\sigma H_z d\sigma = -\frac{1}{\pi r_0^2} \iint_\sigma \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{z=0} d\sigma,$$

dove l'integrazione è estesa a tutto il cerchio σ di raggio r_0. Poichè $d\sigma = r dr\, d\varphi$ e la funzione V è indipendente dall'anomalia φ, si ha

$$H_m = -\frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{z=0} dr = -\frac{2}{r_0^2} (V)_{\substack{r=r_0 \\ z=0}}.$$

Tenendo conto che per $z = 0$ ed $r = r_0$ è verificata la (23'), si ha ancora

$$H_m = -\frac{2}{r_0} \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{\substack{r=r_0 \\ z=0}},$$

cioè, per la seconda delle (8)

$$H_m = 2(H_z)_{\substack{r=r_0 \\ z=0}}. \tag{25}$$

Risulta così confermata la nota proprietà che afferma: *Affinchè l'elettrone descriva una circonferenza di determinato raggio* r_0, *il valore del campo magnetico su questa circonferenza deve essere in ogni istante uguale alla metà del valore medio nell'interno di essa.*

5. Nel caso in cui il campo magnetico sia sinusoidale rispetto al tempo e di pulsazione ω, supponendo che esso sia nullo all'istante iniziale, come si fa nel betatrone, e che sia ottenuto dalla sovrapposizione di un campo indipendente dalla coordinata assiale z, e di un altro sinusoidale rispetto a z, se si vuole che sia verificata la (22), affinchè possano esistere dei moti nel piano $z = 0$, dobbiamo porre

$$V(r, z, t) = [V_1(r) + V_2(r) \cos \beta z] \operatorname{sen} \omega t. \tag{26}$$

con β costante. In questo caso avremo per le (8)

$$\begin{aligned} H_r &= -\frac{\beta}{r} V_2(r) \operatorname{sen} \beta z \operatorname{sen} \omega t \\ H_z &= -\frac{1}{r}\left(\frac{dV_1}{dr} + \frac{dV_2}{dr} \cos \beta z\right) \operatorname{sen} \omega t, \end{aligned} \tag{27}$$

e la costante β sarà determinata imponendo un'ulteriore condizione. Se per esempio si vuole che il campo radiale H_r si annulli oltre che sul piano $z = 0$, anche sui piani $z = \pm h$, deve essere $\beta = \frac{n\pi}{h}$, $(n = 1, 2, 3, ...)$.

Sostituendo nella (15) in luogo di V il valore (26) si deduce che le funzioni $V_1(r)$, $V_2(r)$ devono verificare le equazioni

$$r \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r} \frac{dV_1}{dr}\right) + \frac{\omega^2}{v_0^2} V_1 = 0$$

$$r \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r} \frac{dV_2}{dr}\right) + \left(\frac{\omega^2}{v_0^2} - \beta^2\right) V_2 = 0,$$

le quali porgono

$$V_1 = A_1 r J_1\left(\frac{\omega}{v_0} r\right), \qquad V_2 = A_2 r J_1(\alpha r), \qquad \alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{v_0^2} - \beta^2}, \tag{28}$$

dove J_1 è il simbolo di funzione di Bessel di *prima specie* e di *ordine uno*, ed A_1, A_2 sono costanti arbitrarie. La costante α è un numero reale, oppure è un immaginario puro secondochè $\beta < \frac{\omega}{v_0}$, oppure $\beta > \frac{\omega}{v_0}$. In questo secondo caso ponendo $\alpha = \sqrt{\beta^2 - \frac{v_0^2}{\omega^2}}$, la $J_1(\alpha r)$ va sostituita con la funzione di Bessel non oscillante $I_1(\alpha r)$.

Poichè risulta

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} [x J_1(x)] = J_0(x),$$

ponendo

$$A_1 = -\frac{v_0}{\omega} h_1, \qquad A_2 = -\frac{h_2}{\alpha},$$

si ha

$$V = -\left[\frac{v_0}{\omega} h_1 r J_1\left(\frac{\omega}{v_0} r\right) + \frac{h_2}{\alpha} r J_1(\alpha r) \cos \beta z\right] \operatorname{sen} \omega t$$

e dalle (27) si ricava

$$(29) \qquad \begin{aligned} H_r &= \frac{\beta}{\alpha} h_2 J_1(\alpha r) \operatorname{sen} \beta z \operatorname{sen} \omega t \\ H_z &= \left[h_1 J_0\left(\frac{\omega}{v_0} r\right) + h_2 J_0(\alpha r) \cos \beta z\right] \operatorname{sen} \omega t. \end{aligned}$$

La condizione (23) affinchè nel piano $z = 0$ si abbiano traiettorie circolari, diventa

$$\frac{v_0}{\omega} h_1 \frac{\partial}{\partial r} J_1\left(\frac{\omega}{v_0} r\right) + \frac{h_2}{\alpha} \frac{\partial}{\partial r} J_1(\alpha r) = 0$$

cioè

$$(30) \qquad J_1'\left(\frac{\omega}{v_0} r\right) + \frac{h_2}{h_1} J_1'(\alpha r) = 0,$$

che è l'equazione determinatrice dei raggi r_0 di queste traiettorie.

Se α è reale, cioè $\beta^2 < \frac{\omega^2}{v_0{}^2}$, si riconosce facilmente che la (30) ammette infinite radici positive r_0. In particolare, se $h_2 = 0$, e quindi il campo magnetico è puramente assiale, questi valori di r_0 sono dati da $r_{0j} = \frac{v_0}{\omega} x_j$, essendo x_j gli zeri positivi in ordine crescente della funzione $J_1'(x) \equiv J_0(x) - J_1(x)/x$.

In ogni caso, se h_2 non è nullo, si può disporre del rapporto h_2/h_1 in modo che il movimento avvenga su una circonferenza di raggio r_0 assegnato ad arbitrio.

6. Nel caso in cui la componente traversa H_φ del campo magnetico non è nulla la (9') si modifica nella seguente

$$(31) \qquad \bar{H}^* = -\operatorname{grad} V \wedge \operatorname{grad} \varphi + r H_\varphi \operatorname{grad} \varphi$$

e si ricava quindi

$$\text{rot rot } \overrightarrow{H} = \text{grad } \nabla_2 V \wedge \text{grad } \varphi - \nabla_2(rH_\varphi) \cdot \text{grad } \varphi. \tag{32}$$

Inoltre dalla (7) si deduce che insieme alla (15) si avrà

$$\nabla_2(rH_\varphi) - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2(rH_\varphi)}{\partial t^2} = 0, \tag{33}$$

che è l'equazione alla quale deve soddisfare la componente traversa del campo magnetico.

Dalla (3) si deduce poi che oltre al campo elettrico trasversale $\overrightarrow{E_\varphi}$, espresso dalla (16), si avrà un campo elettrico meridiano $\overrightarrow{E_m}$, tale che

$$\frac{\partial \overrightarrow{E_m}}{\partial t} = \frac{c}{\varepsilon} \text{grad } (rH_\varphi) \wedge \text{grad } \varphi. \tag{34}$$

Se si pone

$$H_\varphi = \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

si ricava

$$\overrightarrow{E_m} = \frac{c}{\varepsilon} \text{grad } (r\Psi) \wedge \text{grad } \varphi \tag{35}$$

e l'equazione del moto (18) diventa ora

$$\frac{d}{dt}(m\overrightarrow{v}) = \frac{e\mu}{c} \left\{ \frac{dV}{dt} \text{grad } \varphi - \frac{d\varphi}{dt} \text{grad } V + \right. \tag{36}$$

$$\left. + \left[v_0^2 \text{grad } (r\Psi) + r \frac{\partial \Psi}{\partial t} \overrightarrow{v} \right] \wedge \text{grad } \varphi \right\}$$

Le equazioni scalari corrispondenti risultano

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\varphi}^2 = -\frac{e\mu}{c} \left\{ \frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial V}{\partial r} + v_0^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{dz}{dt} \right\} \\ &\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = \frac{e\mu}{c} \frac{dV}{dt} \\ &\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = \frac{e\mu}{c} \left\{ -\frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial V}{\partial z} + v_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\Psi) + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{dr}{dt} \right\}. \end{aligned} \tag{37}$$

Sussiste ancora l'integrale (20′), e in virtù di esso le precedenti equazioni si riducono alle seguenti

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = -\frac{1}{2m} \left(\frac{e\mu}{c}\right)^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V}{r}\right)^2 - \frac{e\mu}{c} \left[v_0^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{dz}{dt} \right] \\ &\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = -\frac{1}{2m} \left(\frac{e\mu}{c}\right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V}{r}\right)^2 + \frac{e\mu}{c} \left[v_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\Psi) + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{dr}{dt} \right]. \end{aligned} \tag{38}$$

Le condizioni affinchè si abbiano traiettorie circolari di raggio r_0, nel piano $z = 0$, risultano ora

$$\frac{e\mu}{c}\frac{1}{m}\frac{V}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V}{r}\right) + v_0^2\frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{e\mu}{c}\frac{1}{m}\frac{V}{r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V}{r}\right) - v_0^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi) = 0,$$

che devono essere verificate in ogni istante per $r = r_0$ e $z - 0$. Avendo indicato con $V_0(t)$ il valore della funzione V per $r = r_0$ e $z = 0$, la massa m dell'elettrone in corrispondenza di queste orbite sarà ancora espressa dalla (24').

Nel caso particolare in cui la componente toroidale H_φ del campo magnetico è indipendente dal tempo, si può supporre anche indipendente dal tempo, o addirittura nullo, il campo elettrico meridiano $\vec{E}_m$.

In questo caso si ha dalla (34)

$$rH_\varphi = C_0 \text{ (costante)}, \qquad \vec{H}_\varphi = C_0 \operatorname{grad}\varphi, \tag{39}$$

e l'equazione vettoriale del moto dell'elettrone risulta

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{e\mu}{c}\left(\frac{dV}{dt}\operatorname{grad}\varphi - \frac{d\varphi}{dt}\operatorname{grad}V + C_0\, v \wedge \operatorname{grad}\varphi\right). \tag{40}$$

Si ha ancora l'integrale (20') del momento della quantità di moto e le equazioni ridotte del moto sono ora

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = -\frac{1}{2m}\left(\frac{e\mu}{c}\right)^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V}{r}\right)^2 - \frac{e\mu}{c}C_0\frac{\dot{z}}{r}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = -\frac{1}{2m}\left(\frac{e\mu}{c}\right)^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V}{r}\right)^2 + \frac{e\mu}{c}C_0\frac{\dot{r}}{r}.$$

Si avranno traiettorie circolari di raggio r_0 nel piano $z = 0$, se in ogni istante sono ancora verificate le condizioni

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V}{r}\right) = 0, \qquad \text{per } z = 0, \quad r = r_0,$$

e sussisterà, anche in questo caso, il teorema enunciato alla fine del n. 4.