BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LETTERIO TOSCANO

Funzioni generatrici del prodotto di due polinomi di Legendre o ultrasferici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **14** (1959), n.2, p. 182–189.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_2_182_0>

Funzioni generatrici del prodotto di due polinomi di Legendre o ultrasferici.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina)

Sunto. - *Si stabilisce l'equivalenza di due generatrici del prodotto di due polinomi di Legendre, trovate da diversi Autori.*
Si perviene ad una generatrice, più semplice di altra nota, ancora del prodotto di due polinomi di Legendre.
Si dimostra, provandolo in un caso, che i precedenti risultati ed altri analoghi sui polinomi ultrasferici si possono derivare da risultati più generali.

Summary. - *Two known results on generating functions for the product of two* LEGENDRE *polynomials are equivalent.*
Another new generating function is obtained.
The precedent special results can be derived from more general results concerning JACOBI *polynomials.*

1. In una nota pubblicata recentemente in questo Bollettino, L. CARLITZ [1] si occupa delle due serie

$$\text{(1)} \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_n t^n P_n(\cos\alpha)P_n(\cos\beta) =$$

$$= [1 - 2t\cos(\alpha+\beta) + t^2]^{-1/2}\, F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{4t \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2}\right] \quad |t|<1,$$

$$\text{(2)} \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{n!}{(2\nu, n)} t^n P_n^{(\nu)}(\cos\alpha)P_n^{(\nu)}(\cos\beta) =$$

$$= [1 - 2t\cos(\alpha+\beta) + t^2]^{-\nu}\, {}_2F_1\left[\nu, \nu; 2\nu; \frac{4t\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2}\right] \quad |t|<1,$$

sui polinomi di LEGENDRE $P_n(x)$ e ultrasferici $P_n^{(\nu)}(x)$.

[1] L. CARLITZ, *A generating function for the product of two ultraspherical polynomials*, « Boll. U. M. I. » (3), XIV, 6-9 (1959).
Nel riportare le formule di questa nota ho cambiato $C_n^{\nu}(x)$ con $P_n^{(\nu)}(x)$, $(2\nu)_n$ con $(2\nu, n)$ per seguire le notazioni dei miei precedenti lavori.

E afferma che la somma della prima serie è stata calcolata da C. MAXIMON, (2), mentre alla seconda è pervenuto Egli stesso applicando la formula

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^{2\nu-1}\omega P_n^{(\nu)}(\cos\Omega)d\omega =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)\,n!}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(2\nu,\ n)} P_n^{(\nu)}(\cos\alpha)P_n^{(\nu)}(\cos\beta),$$

con $R(\nu)>0$ e $\cos\Omega=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\omega$, riportata da un lavoro di G. N. WATSON (3).

Osservo qui che nella citata nota di WATSON si trova pure studiata la serie (1) e sono contenuti i due risultati, rispettivamente di LEGENDRE, (4) e WATSON,

$$\sum_0^\infty {}_n t^n P_n(\cos\alpha)P_n(\cos\beta) = \tag{3}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\omega}{(1-2t\cos\Omega+t^2)^{1/2}},$$

$$\sum_0^\infty {}_n t^n P_n(\cos\alpha)P_n(\cos\beta) = \tag{4}$$

$$= \frac{4K/\pi}{[1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2]^{1/2}+[1-2t\cos(\alpha-\beta)+t^2]^{1/2}}$$

con K integrale ellittico completo di prima specie e di modulo

$$\varepsilon = \frac{[1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2]^{1/2}-[1-2t\cos(\alpha-\beta)+t^2]^{1/2}}{[1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2]^{1/2}+[1-2t\cos(\alpha-\beta)+t^2]^{1/2}}.$$

Il passaggio dalla (3) alla (4) si trova in WATSON, mentre resta da provare l'equivalenza delle generatrici (1) e (4).

(2) C. MAXIMON, *A generating function for the product of two Legendre polynomials*, «Norske Videnskabers Selskab Forhandlinger», 29, 82-86 (1957).

(3) G. N. WATSON, *Notes on generating functions of polynomials: Polynomials of Legendre and Gegenbauer*, «J. of the London Math. Soc.», 8, 289-292 (1933).

(4) « Hist. Acad. Sci. Paris », 380 (1789).

È noto che

$$ {}_2F_1(\alpha,\ \beta;\ \alpha-\beta+1;\ \varepsilon^2)=(1+\varepsilon)^{-2\alpha}{}_2F_1\left[\alpha,\ \alpha-\beta+\frac{1}{2};\ 2\alpha-2\beta+1;\ \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\right], $$

da cui

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ \varepsilon^2\right)=\frac{1}{1+\varepsilon}\,{}_2F_1\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\right]. $$

E poichè l'integrale ellittico completo di prima specie è dato da

$$ K(\varepsilon)=\frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ \varepsilon^2\right), $$

segue

$$ \frac{2}{\pi}K(\varepsilon)=\frac{1}{1+\varepsilon}\,{}_2F_1\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\right]. $$

D' altra parte posto, per semplicità,

$$ 1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2=M^2, \qquad 1-2t\cos(\alpha-\beta)+t^2=N^2, $$

si ha

$$ M^2-N^2=4t\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta, $$

$$ \varepsilon=\frac{M-N}{M+N}, \qquad 1+\varepsilon=\frac{2M}{M+N}, $$

$$ \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}=\frac{M^2-N^2}{M^2}=\frac{4t\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2}. $$

Quindi

$$ \frac{4K/\pi}{M+N}=\frac{4}{\pi(M+N)}\frac{\pi}{2}\frac{M+N}{2M}. $$

$$ {}_2F_1\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{M^2-N^2}{M^2}\right]= $$

$$ =[1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2]^{-1/2}{}_2F_1\left[\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{4t\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2}\right]. $$

come si voleva provare.

2. Ancora nel citato lavoro di WATSON si trova che ($|t|<1$)

$$\sum_0^\infty{}_n \left(n+\frac{1}{2}\right) t^n P_n(\cos\alpha) P_n(\cos\beta) = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{(1-t^2)d\omega}{(1-2t\cos\Omega + t^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{2E(\varepsilon)-(1-\varepsilon^2)K(\varepsilon)}{\pi(1-\varepsilon^2)^2}(1-t^2).$$

$$\left\{\frac{1}{2}[1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2]^{1/2}+\frac{1}{2}[1-2t\cos(\alpha-\beta)+t^2]^{1/2}\right\}^{-3},$$

dove figurano i due integrali ellittici completi K ed E.

E mi pare utile riprendere questa serie per esprimere la generatrice con il solo integrale E.

Si sa che

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\omega}{(a^2+b^2-2ab\cos\omega)^\nu} = a^{-2\nu}{}_2F_1\left(\nu,\ \nu;\ 1;\ \frac{b^2}{a^2}\right).$$

Poniamo

$$(a+b)^2 = 1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2 = M^2$$

$$(a-b)^2 = 1-2t\cos(\alpha-\beta)+t^2 = N^2,$$

da cui

$$a^2+b^2 = 1-2t\cos\alpha\cos\beta+t^2,$$

$$ab = t\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta,$$

$$a = \frac{1}{2}(M+N), \qquad b = \frac{1}{2}(M-N).$$

Allora, con $\nu = 3/2$, segue

$$\sum_0^\infty{}_n \left(n+\frac{1}{2}\right) t^n P_n(\cos\alpha) P_n(\cos\beta) =$$

$$= 4\frac{1-t^2}{(M+N)^3}\,{}_2F_1\left[\frac{3}{2},\ \frac{3}{2};\ 1;\ \left(\frac{M-N}{M+N}\right)^2\right].$$

Applichiamo alla ${}_2F_1$ la stessa trasformazione del numero precedente, per cui

$$ {}_2F_1\left[\frac{3}{2},\ \frac{3}{2};\ 1;\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^2\right]=\frac{(M+N)^3}{8M^3}\ {}_2F_1\left[\frac{3}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\frac{M^2-N^2}{M^2}\right]. $$

Ancora con una trasformazione elementare di EULERO

$$ {}_2F_1\left[\frac{3}{2},\ \frac{3}{2};\ 1;\ \left(\frac{M-N}{M+N}\right)^2\right]= $$

$$ =\frac{(M+N)^3}{8M^3}\left(1-\frac{M^2-N^2}{M^2}\right)^{-1/2}{}_2F_1\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{N^2-M^2}{N^2}\right]= $$

$$ =\frac{(M+N)^3}{8M^2N}\,{}_2F_1\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{N^2-M^2}{N^2}\right]. $$

Quindi

$$ \sum_0^\infty{}_n\left(n+\frac{1}{2}\right)t^nP_n(\cos\alpha)P_n(\cos\beta)= $$

$$ =\frac{1-t^2}{2M^2N}\,{}_2F_1\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{N^2-M^2}{N^2}\right]. $$

E introducendo l'integrale ellittico completo di seconda specie

$$ E(\varepsilon)=\frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ \varepsilon^2\right) $$

si ha in definitiva ($|t|<1$)

$$ \sum_0^\infty{}_n\left(n+\frac{1}{2}\right)t^nP_n(\cos\alpha)P_n(\cos\beta)= \tag{6} $$

$$ =\frac{1-t^2}{\pi M^2N}E\left(\sqrt{\frac{N^2-M^2}{N^2}}\right)= $$

$$ =\frac{1-t^2}{\pi}\,\frac{1}{1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2}\,\frac{1}{[1-2t\cos(\alpha-\beta)+t^2]^{1/2}}\,\cdot $$

$$ \cdot\,E\left(\sqrt{\frac{-4\,t\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}{1-2t\cos(\alpha-\beta)+t^2}}\right). $$

3. La somma della serie (2), trovata da L. CARLITZ, si può subito ottenere in quanto l'integrale

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^k \omega d\omega}{(a^2 + b^2 - 2ab\cos\omega)^\mu}$$

è stato già calcolato (5).

4. I precedenti risultati, con quello relativo alla serie (6)

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{n!(n+\nu)}{(2\nu, n)} t^n P_n^{(\nu)}(\cos\alpha) P_n^{(\nu)}(\cos\beta), \qquad |t| < 1,$$

si possono derivare dagli altri più generali (7) $(|t| < 1)$

$$(7) \qquad \sum_0^\infty {}_n \frac{n!(\lambda + \mu + 1, n)}{(\lambda + 1, n)(\mu + 1, n)} t^n P_n^{(\lambda,\mu)}(\cos 2\varphi) P_n^{(\lambda,\mu)}(\cos 2\Phi) =$$

$$= (1+t)^{-\lambda-\mu-1} F_4\left[\frac{1}{2}(\lambda + \mu + 1), \frac{1}{2}(\lambda + \mu + 2); \lambda + 1, \mu + 1; \frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{c^2}\right],$$

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{n!(\lambda + \mu + 1, n)}{(\lambda + 1, n)(\mu + 1, n)} (2n + \lambda + \mu + 1) t^n P_n^{(\lambda,\mu)}(\cos 2\varphi) P_n^{(\lambda,\mu)}(\cos 2\Phi) =$$

$$(8) \quad = \frac{(\lambda + \mu + 1)(1-t)}{(1+t)^{\lambda+\mu+2}} F_4\left[\frac{1}{2}(\lambda + \mu + 2), \frac{1}{2}(\lambda+\mu+3); \lambda+1, \mu+1; \frac{a^2}{c^2}, \frac{b^2}{c^2}\right],$$

dove $P_n^{(\lambda,\mu)}(x)$ è polinomio di JACOBI, F_4 è funzione ipergeometrica a due variabili,

$$a = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\Phi, \qquad b = \cos\varphi\cos\Phi, \quad c = \frac{1+t}{2t^{1/2}}.$$

E qui ci proponiamo di provarlo per la serie (2).

(5) Cfr. G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Second ed., « Cambridge University Press », (1958), pp. 369, 406, 407, con citazione di GEGENBAUER, « Wiener Sitzungsberichte ». LXX, 433 (1874).

(6) Cfr. nota (3).

(7) W. N. BAILEY, *Generalized hypergeometric series*, « Cambridge University Press » (1935).

Ricordiamo che

$$P_n^{(\nu)}(x) = \frac{(2\nu,\ n)}{\left(\nu + \frac{1}{2},\ n\right)} P_n^{\left(\nu-\frac{1}{2},\, \nu-\frac{1}{2}\right)}(x)$$

e facciamo nella (7) $\lambda = \mu = \nu - \frac{1}{2}$. Poniamo $2\varphi = \alpha$, $2\Phi = \beta$.

Si ha

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{n!}{(2\nu,\ n)} t^n P_n^{(\nu)}(\cos\alpha) P_n^{(\nu)}(\cos\beta) =$$

$$= (1+t)^{-2\nu} F_4\left[\nu,\ \nu + \frac{1}{2};\ \nu + \frac{1}{2},\ \nu + \frac{1}{2};\ \frac{a^2}{c^2},\ \frac{b^2}{c^2}\right].$$

E d'altra parte (cfr. la citata opera di BAILEY) vale la formula

$$F_4\left[p,\ q;\ q,\ q;\ \frac{-x}{(1-x)(1-y)},\ \frac{-y}{(1-x)(1-y)}\right] =$$

$$= (1-x)^p (1-y)^p {}_2F_1(p,\ 1+p-q;\ q;\ xy).$$

Intanto

$$a = \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}, \qquad b = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

$$4ab = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta,$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha\cos\beta), \qquad b^2 - a^2 = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta),$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = -\frac{1 - 2t\cos\alpha\cos\beta + t^2}{4t},$$

$$(a+b)^2 - c^2 = -\frac{1 - 2t\cos(\alpha \quad \beta) + t^2}{4t} = -\frac{N^2}{4t},$$

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = \frac{1}{16t^2}[1 - 2t\cos(\alpha + \beta) + t^2][1 - 2t\cos(\alpha - \beta) + t^2] =$$

$$= \frac{M^2N^2}{16t^2},$$

$$1 - 2t\cos\alpha\cos\beta + t^2 - MN = \frac{(M-N)^2}{2}.$$

Allora la risoluzione del sistema

$$\frac{-x}{(1-x)(1-y)} = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{-y}{(1-x)(1-y)} = \frac{b^2}{c^2}$$

dà

$$x = -\frac{(M-N)^2}{16t\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}, \qquad y = -\frac{(M-N)^2}{16t\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\beta}{2}},$$

e in conseguenza

$$xy = \frac{(M-N)^4}{16t^2\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\beta} = \left(\frac{M-N}{M+N}\right)^2,$$

$$(1-x)(1-y) = \frac{(1+t)^2(M-N)^2}{4t^2\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\beta} = \frac{4(1+t)^2}{(M+N)^2}.$$

Risalendo alla serie si ha

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{n!}{(2\nu,\ n)} t^n P_n^{(\nu)}(\cos\alpha)P_n^{(\nu)}(\cos\beta) =$$

$$= \left(\frac{2}{M+N}\right)^{2\nu} {}_2F_1\left[\nu,\ \frac{1}{2};\ \nu+\frac{1}{2};\ \left(\frac{M-N}{M+N}\right)^2\right].$$

Inoltre per la formula

$${}_2F_1(\gamma,\ \delta;\ 2\delta;\ u) = \left(\frac{1+\sqrt{1-u}}{2}\right)^{-2\gamma} {}_2F_1\left[\gamma,\ \gamma-\delta+\frac{1}{2};\ \delta+\frac{1}{2};\ \left(\frac{1-\sqrt{1-u}}{1+\sqrt{1-u}}\right)^2\right],$$

con $\gamma = \delta = \nu$ e $\dfrac{1-\sqrt{1-u}}{1+\sqrt{1-u}} = \dfrac{M-N}{M+N}$ da cui

$$1+\sqrt{1-u} = \frac{M+N}{M}, \qquad \sqrt{1-u} = \frac{N}{M}, \qquad u = \frac{M^2-N^2}{M^2},$$

segue

$$\sum_0^\infty{}_n \frac{n!}{(2\nu,\ n)} t^n P_n^{(\nu)}(\cos\alpha)P_n^{(\nu)}(\cos\beta) =$$

$$= \left(\frac{2}{M+N}\right)^{2\nu}\left(\frac{M+N}{2M}\right)^{2\nu} {}_2F_1\left(\nu,\ \nu;\ 2\nu\ \ \frac{M^2-N^2}{M^2}\right) =$$

$$= [1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2]^{-\nu}{}_2F_1\left[\nu,\ \nu;\ 2\nu;\frac{4t\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}{1-2t\cos(\alpha+\beta)+t^2}\right],$$

come si voleva ottenere.