
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ROBERTO MAGARI

**Sul gruppo delle collineazioni di un piano
grafico di ordine 27 introdotto da O.
Veblen e J. H. Maclagan Wedderburn.**

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 14
(1959), n.2, p. 190–199.

Zanichelli

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1959_3_14_2_190_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Sul gruppo delle collineazioni di un piano grafico di ordine 27
introdotta da O. Veblen e J. H. Maclagan Wedderburn.**

Nota di ROBERTO MAGARI (a Firenze)

Sunto - Si studia il gruppo delle collineazioni di un piano di ordine 27 su un quasicorpo commutativo e distributivo, F , (introdotta dal Dickson) determinando il gruppo, G , delle collineazioni esprimibili come prodotti di sostituzioni lineari a coefficienti in F per automorfismi di F .

Summary - The collineation group of a 27 order plane on a commutative and distributive near-field, F , (introduced by Dickson) is studied, determining the group G , of collineations which are obtained as products of linear substitutions, whose coefficients are in F , for automorphisms of F .

1. Sono stati completamente determinati i gruppi delle collineazioni dei piani su quasicorpi associativi finiti (J. ANDRÉ [1]) e dei piani di HUGHES (G. ZAPPA [10] e L. A. ROSATI [8]). poco si conosce invece intorno ai gruppi delle collineazioni di altri piani non desarguesiani. Mi sono proposto di studiare il problema per uno dei più semplici esempi di piani non desarguesiani e non appartenenti alle classi citate.

DICKSON introduce in [4] una classe di quasicorpi non associativi: il minor ordine possibile per tali quasicorpi è 27 ed esiste un solo elemento della classe di tale ordine. Si tratta di un quasicorpo, F , commutativo e distributivo i cui elementi si possono scrivere nella forma $\Sigma a_i e_i$ con $a_i = 0, 1, -1$ ed $e_i = 1, i, j$. La tavola di moltiplicazione si costruisce in modo ovvio dalla seguente, relativa ai soli elementi i, j .

$$\begin{array}{c|c|c}
 & i & j \\
 \hline
 i & j & 1+i \\
 \hline
 j & 1+i & -1+i+j.
 \end{array}$$

Il piano π sul quasicorpo F , introdotto da VEBLEN e MACLAGAN WEDDERBURN in [9] si può così definire:

$$\begin{aligned} \text{punti di } \pi \text{ sono le terne dei tipi: } & \left\{ \begin{array}{l} (x, y, 1) \\ (x, 1, 0) \\ (1, 0, 0) \end{array} \right\} \text{ punti impropri} \\ \text{rette di } \pi \text{ sono le terne dei tipi: } & \left\{ \begin{array}{l} \langle 1, v, w \rangle \\ \langle 0, 1, w \rangle \\ \langle 0, 0, 1 \rangle \end{array} \right\} \text{ retta impropria} \end{aligned}$$

ad elementi in F ; un punto (x, y, z) appartiene a una retta $\langle u, v, w \rangle$ se e solo se:

$$(1) \quad ux + vy + wz = 0.$$

In quanto segue studierò il gruppo G ⁽¹⁾ formato dalle collineazioni di π esprimibili mediante le:

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = a_{11}\sigma x + a_{12}\sigma y + a_{13}\sigma z \\ y' = a_{21}\sigma x + a_{22}\sigma y + a_{23}\sigma z \\ z' = a_{31}\sigma x + a_{32}\sigma y + a_{33}\sigma z \end{array} \right.$$

con $a_{ij} \in F$ e σ automorfismo di F e troverò che esso è il prodotto di un sottogruppo Γ di ordine 3, isomorfo al gruppo degli automorfismi di F , e di un sottogruppo G' di ordine $2^2 \cdot 3^2$ costituito da tutte e sole le collineazioni che si esprimono linearmente in F . Il piano π appartiene alla classe V nella classificazione di H. LENZ ([5]) e (per conseguenza) alla classe $V, 1$ nella classificazione di A. BARLOTTI ([2] e [3]).

Precisamente nel paragrafo 3. determinerò un sottogruppo di G per mostrare poi nei paragrafi seguenti che esso coincide addirittura con G .

Le considerazioni svolte nel paragrafo 3. sono valide per qualunque piano su un quasicorpo commutativo e distributivo.

2. Il gruppo degli automorfismi di F .

Sia σ un automorfismo di F e si abbia:

$$\sigma i = xi + yj + z, \quad x, y, z \in GF(3),$$

(1) Dimostrerò nel numero 3. che si tratta effettivamente di un gruppo.

si avrà anche:

$$\sigma j = \sigma i = (\sigma i)^2 = (y^2 - xy - xz)i + (x^2 + y^2 - yz)j - y^2 - xy + z^2$$

da cui ($x^3 = x$ etc.):

$$\sigma i \sigma j = (x - xy^2 - y)i + (x - x^2y + z);$$

ma si deve anche avere:

$$\sigma i \sigma j = \sigma(ij) = \sigma(1 + i) = 1 + \sigma i = xi + yj + z + 1$$

e quindi:

$$\begin{cases} x - xy^2 - y = x \\ y = 0 \\ x - xy + z = z = 1 \end{cases}$$

Le tre soluzioni del sistema così ottenuto ($x = 1$; $y = 0$; $z = 0$, 1 , -1) portano all'automorfismo identico ed agli automorfismi ρ , σ così definiti:

$$\begin{aligned} \rho i &= 1 + i & \rho j &= 1 + i - j & \rho(ai + bj + c) &= a\rho i + b\rho j + c \\ \sigma i &= -1 + i & \sigma j &= 1 + i + j & \sigma(ai + bj + c) &= a\sigma i + b\sigma j + c \end{aligned} \quad a, b, c \in GF(3)$$

Il gruppo Θ così trovato dà luogo in modo ovvio a un gruppo, Γ , di collineazioni di π ad esso isomorfo.

3. Il gruppo G .

Sia $|G|$ l'insieme delle collineazioni del tipo:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}\sigma x + \dots \\ y' &= a_{21}\sigma x + \dots \\ z' &= a_{31}\sigma x + \dots \end{aligned}$$

di cui in 1. Mi propongo di dimostrare che gli elementi di $|G|$ formano un gruppo, G , rispetto all'operazione di composizione definita nel modo consueto. Sia G' il gruppo delle collineazioni di π esprimibili come sostituzioni lineari a coefficienti in F ; vale la: $G'\Gamma = \Gamma G'$ anzi G' risulta un sottogruppo normale del gruppo generato dagli elementi di $|G|$ (coincidente come dimostrerò con G stesso). Sia infatti $\varphi \in G$ e $\sigma \in \Gamma$. Se la φ ammette le equazioni:

$$\varphi: \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = a_{21}x + \dots \\ z' = a_{31}x + \dots \end{cases}$$

la $\varphi\sigma (\varphi\sigma(P) = \sigma(\varphi(P)))$ ammette le:

$$\varphi\sigma: \begin{cases} x' = \bar{\sigma}a_{11}\bar{\sigma}x + \bar{\sigma}a_{12}\bar{\sigma}y + \bar{\sigma}a_{13}\bar{\sigma}z \\ y' = \bar{\sigma}a_{21}\bar{\sigma}x + \dots \\ z' = \bar{\sigma}a_{31}\bar{\sigma}x + \dots \end{cases}$$

(dove con $\bar{\sigma}$ indico l'elemento di Θ associato a σ). La $\varphi\sigma$ coincide cioè col prodotto $\bar{\sigma}\bar{\varphi}$ dove $\bar{\varphi}$ è un opportuno elemento di G' . Ne segue quanto asserito più sopra.

Si ha poi $|\Gamma| \cap |G'| = |e|$ con e collineazione identica; sia infatti $\sigma \in |\Gamma| \cap |G'|$, si ha allora con certi $a_{ij} \in F$:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}x' = a_{11}x + \dots \\ \bar{\sigma}y' = a_{21}x + \dots \\ \bar{\sigma}z' = a_{31}x + \dots \end{cases}$$

Ma poichè $\bar{\sigma}$ lascia fermi gli elementi 1, 0, -1, σ lascia fermi i punti (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1) si deve avere $a_{ij} = 1$ e quindi σ coincide con e .

Da quanto ho dimostrato segue che gli elementi di $|G|$ formano un gruppo, $G = \Gamma G' = G' \Gamma$.

Studierò ora il gruppo G' . Sarà utile osservare che π è auto-duale, è infatti una dualità la corrispondenza δ così definita:

$$\delta(x, y, z) = \langle z, y, x \rangle$$

(uso parentesi tonde per i punti e parentesi acute « $\langle \rangle$ » per le rette). Conformemente a noti risultati generali (Cfr. per esempio L. LOMBARDO RADICE [6] pag. 19) π contiene « tutte » le traslazioni (se si considera come retta impropria la $\langle 0, 0, 1 \rangle$). Basta verificare che la sostituzione (definita sui punti propri di π) $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ ($a, b \in F$) è una collineazione (più esattamente: si può estendere in una collineazione di π). Ovviamente essa è una corrispondenza biunivoca dell'insieme dei punti di π su se stesso. Sia ora $\langle u, v, w \rangle$ una retta di π , ogni suo punto proprio $(x, y, 1)$ soddisfa la: $ux + vy + w = 0$ ossia la: $u(x' - a) + v(y' - b) + w = 0$ o anche $ux' + vy' + w - ua - vb = 0$, esso si trasforma cioè in un punto proprio della retta $\langle u, v, w - ua - vb \rangle$. Ne segue l'asserto.

Ogni traslazione non identica ha periodo 3; per risultati noti (Cf. ad es. G. PICKERT [7] pag. 206) se $\tau_{P,0}$ è la traslazione che

porta P in O (P ed O propri) la corrispondenza ω definita dalla $\omega P = \tau_{P,O}O$ è una omotetia di centro O . Se $P = (x, y, 1)$ e $O = (m, n, 1)$, si ha:

$$\tau_P(\xi, \eta, 1) = \xi - x + m, \eta - y + n, 1)$$

da cui:

$$\omega P = \tau_P O = (-x - m, -y - n, 1).$$

Ho fatto vedere che mediante un'opportuna traslazione la retta $\langle u, v, w \rangle$ si trasforma nella $\langle u, v, w - bv - au \rangle$ con $a, b \in F$, trasformando mediante la δ si ottengono (a meno di un'opportuna traslazione) collineazioni del tipo:

$$\begin{aligned} x' &= x - my \\ y' &= y & m \in F \\ z' &= z \end{aligned}$$

Esistono cioè in π « tutte » le omologie che hanno per asse la retta $\langle 0, 1, 0 \rangle$ e per centro il punto $(1, 0, 0)$ (ancora conformemente a risultati noti, cfr. ad esempio L. LOMBARDO RADICE [6] pag. 18).

La omotetia λ con centro nell'origine ha le equazioni:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \\ z' &= z \end{aligned}$$

e trasforma la retta $r = \langle u, v, w \rangle$ nella retta $r' = \langle u, v, -w \rangle$.

Per ogni $P \in r$ $P = (x, y, z)$ si ha infatti:

$$ux + vz + wz = 0$$

da cui

$$-uy' - vy' + wz' = 0$$

ossia

$$ux' + vy' - wz' = 0$$

e il punto trasformato (x', y', z') appartiene quindi alla retta r' .

La trasformata della λ mediante δ avrà allora le equazioni:

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Si tratta di un'omologia avente per asse la retta $\langle 1, 0, 0 \rangle$ e per centro il punto $(1, 0, 0)$.

Le collineazioni trovate generano il gruppo, G , delle collineazioni aventi equazioni del tipo ⁽²⁾:

$$\begin{aligned} x' &= sx + my + pz \\ \textcircled{\circ} \quad y' &= ty + qz & s, t = 1, -1; \quad m, p, q \in F \\ z' &= z \end{aligned}$$

di ordine $2^2 \cdot 3^3$

Il gruppo G è trasformato in sè stesso dalla dualità δ . Consideriamo infatti una retta del tipo $\langle 1, v, w \rangle$. Ogni suo punto proprio $(x, y, 1)$ soddisfa la: $x + vy + w = 0$. Se $(x, y, 1)$ è il trasformato di $(\bar{x}, \bar{y}, 1)$ nella ^(\circ) si ha:

$$\bar{s}\bar{x} + m\bar{y} + p + v(t\bar{y} + q) + w = 0$$

da cui (essendo $t = 1, -1$ $v(t\bar{y}) = (vt)\bar{y}$ (e scriverò anche $vt\bar{y}$):

$$\bar{x} + s(m + tv)\bar{y} + s(p + vq + w) = 0$$

ossia la retta $\langle 1, v, w \rangle$ si trasforma per la inversa della ^(\circ) nella $\langle 1, s(m + tv), s(p + vq + w) \rangle$.

Trasformando mediante δ si ottiene di nuovo una collineazione del tipo ^(\circ).

4. Voglio ora dimostrare che non esistono (oltre quelle già trovate in 3.) altre collineazioni di π esprimibili come sostituzioni lineari a coefficienti in F .

Poichè G contiene « tutte » le possibili omologie speciali di asse improprio e « tutte » le possibili omologie speciali di centro $(1, 0, 0)$ (che corrisponde alla retta impropria stessa nella δ) π appartiene alla classe $V, 1$ nella classificazione di A. BARLOTTI [3] (non potendo essere desarguesiano) e quindi ogni collineazione di G (\bar{G} gruppo di tutte le collineazioni di π) lascia ferma la retta impropria (e il punto $(1, 0, 0)$) (altrimenti il piano risulterebbe, appunto, desarguesiano). Ogni collineazione di \bar{G} induce quindi nel piano affine $\bar{\pi} = \pi - l_\infty$ (l_∞ retta impropria di π) una collineazione. Dimostrerò ora che, fra queste collineazioni quelle del tipo;

$$\textcircled{\circ} \quad \begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases} \quad a, b, c, d, p, q \in F$$

⁽²⁾ Se $z = 0$ bisogna supporre $t = 1$, se $z = 0$ e $y = 0$, $s = 1$

si riducono tutte alla forma:

$$(4) \quad \begin{cases} x' = sx + my + p \\ y' = ty + q \end{cases} \quad s, t = 1, -1 \quad m, p, q \in F$$

ossia a quelle studiate in 3. (si può osservare subito che dev'essere $c=0$ affinché il punto $(1, 0, 0)$ risulti mutato in se stesso).

A questo scopo è opportuno premettere i seguenti lemmi:

LEMMA 1. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione: $m(ky) = (mk)y$ sia un'identità in y ($m, k, y \in F$) è la $m, k \in K$ (K centro di F , isomorfo al campo di Galois di ordine 3).*

La condizione è ovviamente sufficiente.

Posto $m = m_1i + m_2j + m_3k = k_1i + \dots$ $y = y_1i + \dots$ l'equazione scritta equivale alla:

$$(5) \quad (m_1i + m_2j)[(k_1i + k_2j)(y_1i + y_2j)] = [(m_1i + m_2j)(k_1i + k_2j)](y_1i + y_2j)$$

(come segue dalla proprietà distributiva del prodotto e dalla \mathbb{F}_3 sufficienza della condizione). Sviluppando i calcoli secondo la tabella data in 1. si trovano le condizioni:

$$(6) \quad \begin{cases} m_1k_2y_2 = m_2k_1y_1 \\ m_1k_2y_2 = m_2k_1y_1 \end{cases}$$

Supposto $k_1 \neq 0$ o $k_2 \neq 0$ si trova $m_1y_2 = m_2y_1$ il che porta $m_1 = 0$ e $m_2 = 0$; ne segue la necessità della condizione.

LEMMA 2. - *Condizione necessaria e sufficiente affinché (a) l'insieme I dei punti $(x, y, 1)$ per cui vale la: $mx + ny = 0$ ($m, n \in F$) coincida con l'insieme dei punti propri di una retta è che (b) $m \in K$ o $n/m \in K$ (indico con a/b l'unica soluzione dell'equazione $bx = a$ ($b \neq 0$)).*

Ad I appartengono infatti i punti $(0, 0, 1)$ e $(-n/m, 1, 1)$ che appartengono altresì alla retta $r: \langle 1, n/m, 0 \rangle$. La a) equivale allora alla condizione che I coincida con l'insieme dei punti propri di r (che soddisfano l'equazione $x + (n/m)y = 0$) ossia alla condizione che si abbia per ogni $y \in F$: $m\left(-\frac{n}{m}y\right) + ny = 0$ ossia, posto $n/m = k$ (si può supporre $m \neq 0$ altrimenti varrebbe senz'altro la b)

$$(7) \quad m(ky) = (mk)y.$$

Per il lemma 1. la (7) equivale alla b) e per conseguenza la a) equivale alla b).

Consideriamo ora una applicazione dell'insieme dei punti di $\bar{\pi}$ in sè che possa essere rappresentata dalle (3), componendola con un'opportuna traslazione si ottiene la:

$$(8) \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

e la (3) è una collineazione se e solo se lo è la (8). Nella inversa della (8) i punti della retta $\langle 1, 0, 0 \rangle$ si trasformano nei punti le cui coordinate soddisfano la $ax + by = 0$; per il lemma 2. questo è l'insieme dei punti propri di una retta se e solo se $a \in K$ o $b/a \in K$, perchè le (8) rappresentino una collineazione occorre quindi che la prima equazione assuma una delle seguenti forme:

$$a) x' = by \quad b) x' = sx + by \quad c) x' = a(sx + y) \quad a, b \in F \quad s = 1, -1$$

Moltiplicando per l'inversa della collineazione:

$$\begin{cases} x' = sx + by \\ y' = y \end{cases}$$

le trasformazioni (8) che hanno come prima equazione la b si trasformano in altre che ammettono come prima equazione la: $\bar{b}) x' = x$, allo stesso modo al posto della c) si può considerare la $\bar{c}) x' = ax$.

Com'è ho osservato in 4. il punto $(1, 0, 0)$ deve essere lasciato fermo da qualunque collineazione, ne segue che la retta di equazione $y' = 0$ dev' essere necessariamente mutata in se stessa dalla inversa di ogni eventuale collineazione che abbia la forma (8) (in se stessa e non in una parallela perchè la (8) tiene ferma l'origine). Affinchè la (8) rappresenti una collineazione occorre dunque che la sua seconda equazione abbia la forma:

$$(9) \quad y' = dy \quad d \in F \quad d \neq 0.$$

Esaminerò ora le trasformazioni che si ottengono associando le $a), b), c)$ con la (9) e mostrerò che in nessun caso salvo quelli trovati in 3. esse sono collineazioni.

$$(9) \quad \begin{cases} x' = by \\ y' = dy \end{cases}$$

Si tratta di una corrispondenza non biunivoca.

$$(9^0) \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = dy \end{cases}$$

L'equazione $x' + vy' = 0$ che rappresenta una retta è trasformata dalla inversa della $(^{\circ\circ})$ nella:

$$(10) \quad x + v(dy) = 0.$$

L'insieme di punti rappresentato da questa equazione contiene l'origine e il punto $(-vd, 1, 1)$; la (10) rappresenta quindi una retta se e solo se equivale alla:

$$(11) \quad x + (vd)y = 0$$

che rappresenta la retta congiungente i due punti considerati. Questo è possibile se e solo se si ha: $v(dy) = (vd)y$ identicamente in y (e in v) il che per il lemma 1. accade solo se $d = 1, -1$. In questo caso si ricade però in una collineazione già nota.

$$(^{\circ\circ\circ}) \quad \begin{cases} x' = ax \\ y' = dy \end{cases}$$

L'equazione $x' + vy' = 0$ si trasforma mediante la inversa della $(^{\circ\circ\circ})$ nella:

$$(12) \quad \begin{cases} ax + v(dy) = 0 \\ ax + dy = 0. \end{cases} \quad \text{che per } v = 1 \text{ si scrive:}$$

Per il lemma 2. quest'ultima equazione rappresenta una retta solo se $a \in K$ o $a/d \in K$. Il primo caso si riconduce subito al precedente osservando che per la biunivocità della corrispondenza dev'essere $a \neq 0$ e ricorrendo alla collineazione $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ trovata in 3. Nel secondo caso la $(^{\circ\circ\circ})$ si riduce alla:

$$(13) \quad \begin{cases} x' = ax \\ y' = tay \end{cases} \quad t = 1, -1 \quad \begin{array}{l} \text{(sempre ricorrendo ad una delle col-} \\ \text{lineazioni trovate in 3 si può sup-} \\ \text{porre } t = 1) \end{array}$$

e la (12) diviene:

$$(14) \quad ax + tv(ay) = 0$$

L'insieme rappresentato dalla (14) contiene l'origine e il punto $(-tv, 1, 1)$ ragionando come per la $(^{\circ\circ})$ si trova allora che la (13) rappresenta una collineazione se e solo se la (14) equivale alla: $x + tvy = 0$ da cui: $v(ax) = a(vy)$ identicamente in v ed y il che è impossibile per il lemma 1.

Resta così dimostrato che:

Il gruppo, G , delle collineazioni di π ammette un sottogruppo,

G , prodotto diretto di un sottogruppo Γ isomorfo al gruppo degli automorfismi di F (di ordine 3) e di un sottogruppo G' di ordine $2^2 \cdot 3^9$ costituito dalle collineazioni che si esprimono linearmente in F . Le collineazioni di G' sono tutte della forma:

$$x' = sx + my + pz$$

$$y' = tx + qz$$

$$z' = z$$

Il piano π appartiene alla classe V nella classificazione di Lenz [5] e (per conseguenza) alla classe V, 1 nella classificazione di A. Barlotti [3].

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. ANDRÉ, *Projektive Ebenen über Fastkörpern*. «Math. Zeitschrift», 62, pagg. 137-160 (1955).
- [2] A. BARLOTTI, *Le possibili configurazioni del sistema delle coppie punto-retta (A, a) per cui un piano grafico risulta (A, a)-transitivo*. «Boll. U. M. I.» (3), Vol 12, pp. 212-226 (1957).
- [3] A. BARLOTTI, *Sulle possibili configurazioni del sistema delle coppie punto-retta (A, a) per cui un piano grafico risulta (A, a)-transitivo*. «dal Convegno Internazionale Reticoli e Geometrie Proiettive» Palermo Messina 1957.
- [4] DICKSON, *Linear algebras in which division is always uniquely possible*, Trans. of Am. Math. Soc, Vol. 7, 1906, pagg. 370-390.
- [5] H. LENZ, *Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projective Ebenen* «Jahresbericht der Deutschen Math.» Ver. 57, 20-31 (1954).
- [6] L. LOMBARDO RADICE, *Piani grafici finiti non desarguesiani*. Palermo 1959 edit. G. DENARO.
- [7] G. PICKERT, *Projektive Ebenen*, Lange e Springer, 1955
- [8] L. A. ROSATI, *I gruppi di collineazioni dei piani di Hughes*, «Boll. U. M. I.» 1958, pagg. 505-513.
- [9] O. VEBLEN e J. H. MACLAGAN WEDDERBURN, *Non desarguesian and non pascalian geometries*, «Trans. Am. Math. Soc.» (8) 1907 pp. 379-378.
- [10] G. ZAPPA, *Sui gruppi di collineazioni dei piani di Hughes*, «Boll. U. M. I.» (3) Vol. 12, pp. 507-516.